

А. Б. МИХАЙЛОВСКИЙ

**ТЕОРИЯ
ПЛАЗМЕННЫХ
НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ**

ТОМ 1

**НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ОДНОРОДНОЙ
ПЛАЗМЫ**

Издание 2-е
переработанное, дополненное



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1975

Теоретические сведения о неустойчивостях разбросаны в основном по множеству журнальных статей. Существует также ряд обзоров по некоторым разделам теории неустойчивостей. Теперь настала пора систематизировать все эти сведения и представить их с единой точки зрения. Этой цели служит предлагаемая монография.

Для чтения книги не требуется специальных знаний по физике плазмы — необходимо лишь знакомство с уравнениями Больцмана и Максвелла. Все остальное получается как следствие этих уравнений. Все выводы приводятся полностью, так что при чтении книги нет необходимости обращаться к многочисленным журнальным статьям. Во многих случаях для большей наглядности физической картины результаты представляются в приближенном виде. В монографии использованы результаты, полученные в свое время многими авторами. Списки соответствующих работ приводятся в конце каждой главы вместе с указанием, какие именно результаты этих работ имеют отношение к изложению. Общий план книги обсуждался с чл.-корр. АН УССР Я. Б. Файнбергом. Рукопись первого тома была просмотрена акад. М. А. Леонтовичем и чл.-корр. АН СССР В. В. Каломцевым*, сделавшими ряд полезных замечаний.

В процессе работы над книгой мне оказали большую помощь Л. В. Михайловская и А. П. Чинцова, а также сотрудники Института физики плазмы АН УССР.

Всеим этим лицам я приношу искреннюю благодарность.

* Был академиком. — Прим. автора ко второму изданию.

Поведение частиц плазмы определяется их функцией распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, где α — сорт частиц (электронов или ионов). Эта функция имеет смысл числа частиц, которые в момент времени t находятся в единичном элементе объема вблизи точки \mathbf{r} и обладают скоростями, лежащими в единичном интервале вблизи \mathbf{v} . Функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = C_\alpha. \quad (I)$$

Символ C_α определяет изменение f_α вследствие столкновений.

Если столкновения не важны, $C_\alpha \rightarrow 0$, уравнение (I) называют уравнением Больцмана—Власова.

Остальные обозначения в уравнении (I) таковы: e_α , m_α — заряд и масса частиц; c — скорость света; \mathbf{E} , \mathbf{B} — напряженность электрического и магнитного полей.

Поля \mathbf{E} , \mathbf{B} описываются уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (\rho + \rho_0); \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Здесь ρ , \mathbf{j} — плотности заряда и тока, просуммированные по электронам и ионам:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}; \\ \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Величины ρ_0 , \mathbf{j}_0 соответствуют сторонним зарядам и токам, либо создаваемым в плазме искусственно, либо возникающим из-за флуктуаций, не учитываемых уравнением Больцмана.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

ГЛАВА 1

НЕУСТОЙЧИВОСТИ ХОЛОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

§ 1.1. Гидродинамическое приближение

Будем считать плазму состоящей из нескольких групп частиц, движущихся друг относительно друга. Движением частиц внутри каждой группы будем пренебрегать. Это означает, что функция распределения электронов (или ионов)

$$f = \sum_{\alpha} n^{(\alpha)} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}^{(\alpha)}), \quad (1.1)$$

где α — номер группы; $n^{(\alpha)}$, $\mathbf{V}^{(\alpha)}$ — плотность и скорость частиц группы α . Плазму с линейчатой функцией распределения типа (1.1) будем называть *холодной* в отличие от *горячей* — с размытым распределением частиц по скоростям.

Кинетическое уравнение (1) в случае холодной плазмы сводится к системе гидродинамических уравнений для $n^{(\alpha)}$ и $\mathbf{V}^{(\alpha)}$. Действительно, интегрируя по скорости (1) с весом 1 и \mathbf{V} , пренебрегая столкновениями и учитывая (1.1), получаем:

$$\frac{\partial n^{(\alpha)}}{\partial t} + \operatorname{div} (n^{(\alpha)} \mathbf{V}^{(\alpha)}) = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^{(\alpha)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(\alpha)} \nabla) \mathbf{V}^{(\alpha)} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}^{(\alpha)}, \mathbf{B}] \right). \quad (1.3)$$

Эти уравнения связывают плотность и скорость частиц группы α с электрическим и магнитным полями. В свою

очередь, \mathbf{E} и \mathbf{V} , согласно уравнениям (II), (III) и (1.1), есть функции плотности и скорости зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n^{(\alpha)}; \quad (1.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n^{(\alpha)} \mathbf{V}^{(\alpha)}. \quad (1.5)$$

Здесь суммирование по α распространено на электроны и ионы. Совместно с двумя последними уравнениями системы (II) уравнения (1.2) — (1.5) образуют замкнутую систему уравнений холодной плазмы.

§ 1.2. Постановка задачи о собственных колебаниях

Пусть вплоть до некоторого момента времени $t = 0$ плазма находилась в стационарном состоянии, так что при $t < 0$

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0; & \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0; \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0; & \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

и величины с индексом нуль не зависят от времени. (Индекс α у n и \mathbf{V} для простоты опущен.)

В момент времени $t = 0$ плазма каким-либо способом выводится из равновесного состояния, так что при $t > 0$

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0 + n'; & \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'; \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'; & \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Величины со штрихами характеризуют отклонения плотности, скорости и поля от соответствующих равновесных значений и в связи с этим могут быть названы *возмущениями*.

Нас будет интересовать зависимость возмущений от времени. Будем считать возмущения малыми. Тогда в пренебрежении их квадратичными комбинациями из системы уравнений (II), (1.2) — (1.5) получаем две подсистемы уравнений: для стационарных и возмущенных величин.

Представим временную зависимость линеаризованных возмущений в виде

$$X'(t, \mathbf{r}) = X'(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t). \quad (1.8)$$

Это значительно упрощает исследование, поскольку операторы $\partial/\partial t$ преобразуются в числа

$$\partial/\partial t \rightarrow -i\omega. \quad (1.9)$$

Такой упрощенный подход в задачах о колебаниях холодной однородной плазмы можно оправдать более строгим методом Лапласа (см. задачу § 1.3). В результате линеаризованные уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n' + \operatorname{div}(n' \mathbf{V}_0 + n_0 \mathbf{V}') &= 0; \\ -i\omega \mathbf{V}' + (\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{V}' + (\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{V}_0 &= \\ = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{V}' \mathbf{B}_0] + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_0 \mathbf{B}'] \right); \\ \operatorname{rot} \mathbf{V}' &= \frac{4\pi}{c} \sum e (n' \mathbf{V}_0 + n_0 \mathbf{V}') - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}'; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}'; \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 4\pi \sum e n'; \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Заметим, что не все уравнения этой системы независимы: последние два являются следствием остальных. Решая систему уравнений (1.10) при известных граничных условиях, можно найти спектр частот ω , при которых эти уравнения имеют ненулевые решения. Такие значения частот назовем *собственными частотами колебаний плазмы*.

В настоящей главе рассмотрены собственные колебания плазмы в отсутствие статического магнитного поля, $\mathbf{B}_0 = 0$. При этом предположении во втором уравнении системы (1.10) выпадает член $[\mathbf{V}', \mathbf{B}_0]$. В дальнейшем это обстоятельство будет использоваться без дополнительных оговорок.

§ 1.3. Собственные колебания покоящейся однородной плазмы

Пусть плазма пространственно-однородна, а скорость стационарного движения всех ее частиц равна нулю:

$$\nabla n_0 = 0; \quad (1.11)$$

$$\mathbf{V}_0 = 0. \quad (1.12)$$

В случае пространственно-однородной плазмы координатная зависимость возмущений, как следует из (1.10), может быть выбрана в виде плоской волны

$$X'(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

При этом система уравнений (1.10) становится алгебраической. Приравняв нулю ее определитель, можно найти связь между частотой собственных колебаний и волновым вектором. Такое соотношение будем называть *дисперсионным уравнением*.

С учетом (1.11) и (1.12) из (1.10) находим, что частота собственных колебаний должна удовлетворять одному из двух уравнений:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2; \quad (1.14)$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2, \quad (1.15)$$

где $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_e$. В этих уравнениях пренебрежено малыми членами порядка m_e/m_i , обусловленными возмущенным движением ионов. Роль ионов сводится лишь к компенсации стационарного заряда электронной компоненты плазмы, $n_0^{(i)} = n_0^{(e)} = n_0$; ионы считаем однозарядными $e_i = -e_e$. Величину ω_{pe} в дальнейшем будем называть *ленгмюровской частотой электронов*.

Колебания типа (1.14) назовем *электронными ленгмюровскими*. Это чисто электростатические колебания, так что

$$\mathbf{V}' = 0. \quad (1.16)$$

Электрическое поле ленгмюровских колебаний может быть представлено в виде градиента скалярного потенциала

$$\mathbf{E}' = -\nabla\psi. \quad (1.17)$$

Для получения уравнения (1.14) нет необходимости использовать полную систему уравнений (1.10). Достаточно предположить выполненным соотношение (1.17), и система (1.10) существенно упростится и сведется к следующей:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\psi &= 4\pi e_e n'_e; \\ -i\omega n'_e + n_0 \operatorname{div} \mathbf{V}'_e &= 0; \\ -i\omega \mathbf{V}'_e &= -(e_e/m_e) \nabla\psi'_e \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Из (1.18) следует, что (1.14) остается в силе не только в случае плоских волн, но и при произвольной координатной зависимости потенциала возмущения. В этом смысле об уравнении для ленгмюровских колебаний (1.14) можно говорить как о *вырожденном дисперсионном уравнении*.

Возмущения типа (1.15) при $c^2 k^2 \gg \omega_{pe}^2$ представляют собой электромагнитные волны, не связанные с движением зарядов. В этом предельном случае уравнение (1.15) дает известный закон распространения света в вакууме:

$$\omega^2 = c^2 k^2. \quad (1.19)$$

Этот простой закон дисперсии существенно изменяется в случае длинноволновых колебаний:

$$k^2 < \omega_{pe}^2 / c^2. \quad (1.20)$$

При этом, в частности, фазовая скорость волн ω/k существенно превышает скорость света

$$\omega/k = c (1 + \omega_{pe}^2 / c^2 k^2)^{1/2}. \quad (1.21)$$

С помощью уравнений (1.10) убеждаемся, что, как и в отсутствие плазмы, электрическое поле волны типа (1.15) — чисто вихревое:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0. \quad (1.22)$$

Соответствующая электромагнитным волнам подсистема уравнений (1.10) может быть представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{V}' + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{V}' + \frac{4\pi e^2 n_0}{c} \operatorname{rot} \mathbf{V}'_e &= 0; \\ -i\omega \mathbf{V}'_e &= \frac{e_e}{m_e} \mathbf{E}'; \\ \operatorname{div} \mathbf{V}'_e &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{V}'; \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{V}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Эти уравнения сводятся к одному векторному — для поля \mathbf{V}' :

$$\Delta \mathbf{V}' + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_{pe}^2) \mathbf{V}' = 0. \quad (1.24)$$

Отсюда с учетом (1.13), как очевидное следствие, вытекает (1.15).

Задача. Получить уравнение (1.14) методом Лапласа.

Решение. Полагая в линеаризованных уравнениях (1.2) — (1.4) $V_0 = 0$, $V = 0$, $E' = -\nabla\psi$. Пространственную зависимость возмущений выбираем в виде $\exp(ikx)$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \partial n'/\partial t + ikV'n_0 &= 0; \\ \partial V'/\partial t = -iek\psi/m; \quad k^2\psi &= 4\pi en'. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Вместо величин $n'(t)$, $V'(t)$, $\psi(t)$ введем их лаплас-образы n'_p , V'_p , ψ_p , определив последние соотношением

$$X'_p = \int_0^{\infty} X'(t) \exp(-pt) dt. \quad (1.26)$$

Интегрируя обе части уравнений (1.25) по t от 0 до ∞ с весом $\exp(-pt)$, получаем уравнения для лаплас-образов:

$$\left. \begin{aligned} pn'_p + ikn_0V'_p &= n'(0); \\ pV'_p = -\frac{iek}{m}\psi_p + V'(0); \\ k^2\psi_p &= 4\pi en'_p, \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

где $n'(0)$, $V'(0)$ — возмущения плотности и скорости при $t = 0$. Из этой системы алгебраических уравнений, в частности, следует:

$$\psi_p = -\frac{4\pi e}{k^2} \frac{ikn_0V'(0) - pn'(0)}{p^2 - \omega_{pe}^2}, \quad (1.28)$$

где ω_{pe}^2 — квадрат ленгмюровской частоты электронов. Используя формулу обратного преобразования Лапласа

$$X'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \exp(pt) X'_p dp, \quad (1.29)$$

где σ — положительное число, лежащее правее всех полюсов функции X'_p , из (1.28) находим

$$\psi(t) = -\frac{4\pi e}{k^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} [ikn_0V'(0) - pn'(0)] \frac{\exp(pt) dp}{p^2 - \omega_{pe}^2}. \quad (1.30)$$

При $t < 0$ этот интеграл можно вычислить, смещая контур интегрирования в область $\text{Re } p \rightarrow +\infty$. Тогда подынтегральное выра-

жение окажется равным нулю, так что

$$\psi(t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (1.31)$$

При $t > 0$ смещаем контур интегрирования в область $\text{Re } p \rightarrow -\infty$. В этом случае интеграл отличен от нуля за счет вклада полюсов подынтегрального выражения. Полюса подынтегрального выражения (1.30) соответствуют нулям знаменателя (1.28) и лежат в точках $p = p_0$, где

$$p_0 = \pm i\omega_{pe}. \quad (1.32)$$

В результате из (1.30) следует

$$\psi(t) = \frac{2\pi en_0}{k^2} \left\{ \left[\frac{n'(0)}{n_0} + \frac{kV'(0)}{\omega_{pe}} \right] \exp(-i\omega_{pe}t) + \left[\frac{n'(0)}{n_0} - \frac{kV'(0)}{\omega_{pe}} \right] \exp(i\omega_{pe}t) \right\}. \quad (1.33)$$

Видно, что потенциал осциллирует во времени с частотами ω_{pe} и $-\omega_{pe}$, что находится в соответствии с (1.14).

§ 1.4. Дисперсионное уравнение для плазмы, состоящей из совокупности направленных потоков

Перейдем к исследованию колебаний плазмы, состоящей из некоторого числа направленных потоков, движущихся друг относительно друга. Относительное движение особенно влияет на ветвь ленгмюровских колебаний, т. е. на потенциальные (электростатические) колебания. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только потенциальных возмущений.

Дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений $E = -\nabla\psi$ получаем так. Из уравнений непрерывности и движения (1.10) находим возмущение плотности заряда частиц α -го сорта $\rho^{(\alpha)} = e_\alpha n^{(\alpha)}$ как функцию потенциала ψ , $\rho^{(\alpha)} = \chi^{(\alpha)} \psi$. Величина $\chi^{(\alpha)}$ оказывается равной

$$\chi^{(\alpha)} = \frac{e_\alpha^2 n_0^{(\alpha)} k^2}{m_\alpha (\omega - \mathbf{k}V^{(\alpha)})^2}. \quad (1.34)$$

Затем значение $\rho^{(\alpha)}$ подставляем в уравнение Пуассона $k^2\psi = 4\pi \sum_\alpha \rho^{(\alpha)}$. После сокращения на $k^2\psi$ получаем искомого дисперсионное уравнение

$$\epsilon_0 \equiv 1 + \sum_\alpha \epsilon_0^{(\alpha)} = 0, \quad (1.35)$$

где

$$\epsilon_0^{(\alpha)} \equiv - (4\pi/k^2) \chi^{(\alpha)}. \quad (1.36)$$

В рассматриваемом случае

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = - (\omega_p^{(\alpha)})^2 / (\omega - \mathbf{kV}^{(\alpha)})^2. \quad (1.36')$$

Можно показать (см. Приложение к гл. 1), что величина ϵ_0 связана с компонентами тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} соотношением

$$\epsilon_0 = \frac{1}{k^2} k_i \epsilon_{ij} k_j. \quad (1.37)$$

Поэтому ее можно назвать скалярной диэлектрической проницаемостью.

Согласно (1.35), дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний получается приравнением нулю скалярной диэлектрической проницаемости. В общем же случае дисперсионное уравнение имеет вид, приведенный в Приложении к гл. 1.

§ 1.5. Пучковая неустойчивость

Пусть электронная компонента плазмы состоит из двух потоков, движущихся друг относительно друга. Электронные колебания такой плазмы описываются уравнениями (1.35), (1.36') с двумя значениями индекса α . Некоторые из решений дисперсионного уравнения (1.35) имеют положительную мнимую часть $\text{Im } \omega > 0$. Это означает, что в отличие от строго периодических во времени колебаний покоящейся плазмы возмущения системы двух потоков могут самопроизвольно нарастать во времени. Плазму, в которой возможна самопроизвольная раскачка колебаний, назовем неустойчивой.

1. Неустойчивость двух пучков равной плотности. В том, что уравнение (1.35) может иметь решения с $\text{Im } \omega > 0$, проще всего убедиться на примере двух электронных пучков равной плотности, движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью:

$$n_{01} = n_{02} \equiv n_0; \quad V_{01} = -V_{02} \equiv V. \quad (1.38)$$

В этом случае уравнение (1.35) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} V)^2} - \frac{\omega_p^2}{(\omega + k_{\parallel} V)^2} = 0; \quad \mathbf{k}_{\parallel} V / |\mathbf{V}|. \quad (1.39)$$

Это уравнение сводится к биквадратному по ω . Его корни, $\omega = \omega(k)$, равны

$$\omega = \pm \sqrt{(k_{\parallel} V)^2 + \omega_p^2} \pm \omega_p (\omega_p^2 + 4k_{\parallel}^2 V^2)^{1/2}. \quad (1.40)$$

Отсюда находим, что если длина волны не слишком мала:

$$k_{\perp} < \sqrt{2} \omega_p / V, \quad (1.41)$$

то один из четырех корней чисто мнимый с $\text{Im } \omega > 0$. В частности, при $k_{\parallel} \ll \omega_p / V$

$$\text{Im } \omega = |k_{\parallel} V|. \quad (1.42)$$

В дальнейшем мнимую часть частоты колебаний мы будем, как правило, называть инкрементом колебаний и обозначать буквой γ :

$$\text{Im } \omega \equiv \gamma. \quad (1.43)$$

Максимальный инкремент нарастания колебаний типа (1.40) достигается при

$$k_{\perp} = k_{\text{онт}} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\omega_p}{V} \quad (1.44)$$

и равен

$$\gamma_{\text{макс}} = \omega_p / 2. \quad (1.45)$$

Вещественная часть выражения для частоты нарастающих колебаний в рассмотренном примере двух потоков, удовлетворяющих условиям (1.38), оказывается равной нулю. В этом смысле процесс, соответствующий возмущенному движению плазмы, чисто аperiodический.

Бом и Гросс так поясняют механизм пучковой неустойчивости. Малое возмущение электрического поля вызывает в соответствующей точке пространства модуляцию скорости пучков. Это в свою очередь приводит к бунчировке пространственного заряда в направлении движения каждого пучка. В результате создается потенциал, больший первоначального. Поле, обязанное тому или иному пучку, модулирует другой пучок, который затем снова подпитывает источник модуляции. Это приводит к нарастанию

танию амплитуды возмущения, что и соответствует неустойчивости.

2. Неустойчивость пучка малой плотности, проходящего через плазму. Предположим теперь, что плотность одного из потоков мала по сравнению с плотностью другого: $n_1 \ll n_0$. Покажем, что такая система двух потоков также неустойчива.

Выберем систему отсчета, связанную с более плотной компонентой плазмы. Дисперсионное уравнение (1.35) в рассматриваемом случае имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\alpha \omega_{pe}^2}{(\omega - k_{\parallel} V)^2} = 0. \quad (1.46)$$

Здесь $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_e$; $\alpha = n_1 / n_0 \ll 1$; V — скорость разреженной компоненты плазмы.

Используя малость параметра α и полагая, что величина $k_{\parallel} V$ не слишком близка к ω_{pe} , с помощью (1.46) находим, что два из четырех корней соответствуют ленгмюровским колебаниям (1.14), а два других равны

$$\omega = k_{\parallel} V \pm V \sqrt{\alpha} \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{1 - (\omega_{pe}/k_{\parallel} V)^2}}. \quad (1.47)$$

Видно, что при $k_{\parallel} V < \omega_{pe}$ корни (1.47) комплексны [ср. с (1.41)], причем один из них соответствует неустойчивости с инкрементом

$$\gamma = V \sqrt{\alpha} \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{(\omega_{pe}/k_{\parallel} V)^2 - 1}}. \quad (1.48)$$

Колебания типа (1.47) имеют групповую скорость $V_{гр} = \partial \omega / \partial k$, близкую к скорости потока $V_{гр} \approx V$. Поэтому эти колебания можно назвать сносными.

При $k_{\parallel} \approx \omega_{pe}/V$ частота ленгмюровских колебаний приближенно совпадает с частотой сносных колебаний. В этом случае уравнения (1.47) и (1.48) теряют силу. Соотношения, характеризующие раскачку колебаний при $\gamma > |k_{\parallel} V - \omega_{pe}|$, можно получить следующим путем. Будем полагать, что в нулевом приближении по параметру α частота колебаний

$$\omega^{(0)} \approx \omega_{pe} \quad (1.49)$$

и

$$|\omega^{(1)}| \gg |\omega_{pe} - k_{\parallel} V|,$$

где $\omega^{(1)}$ — поправка к частоте. Тогда из (1.46) для $\omega^{(1)}$ следует

$$2 \frac{\omega^{(1)}}{\omega_{pe}} - \frac{\alpha \omega_{pe}^2}{(\omega^{(1)})^2} = 0. \quad (1.50)$$

Отсюда получаем для добавки к частоте парастоящих возмущений

$$\text{Re } \omega^{(1)} = -\omega_{pe} \alpha^{1/3} / 2^{2/3}, \quad (1.51)$$

$$\text{Im } \omega^{(1)} \equiv \gamma = \omega_{pe} \sqrt{3} \alpha^{1/3} / 2^{4/3}. \quad (1.52)$$

На границе применимости этих формул $(\omega_{pe}/k_{\parallel} V)^2 - 1 \approx \alpha^{2/3}$ выражения (1.48) и (1.52) дают одинаковые по порядку величины значения γ .

Выражение (1.52) определяет максимальный инкремент колебаний, возбуждаемых в плазме пучком малой плотности. Видно, что даже при малом отношении плотностей пучка и плазмы нарастание колебаний может быть значительным, поскольку $\gamma \sim \alpha^{1/3}$. Этот эффект увеличения инкремента обусловлен своеобразным резонансом собственных колебаний покоящейся плотной плазмы и сносных колебаний пучка. В этом смысле неустойчивость с инкрементом типа (1.52) можно назвать резонансной в отличие от перерезонансной неустойчивости типа (1.48).

Общая картина ветвей колебаний $\text{Re } \omega = \text{Re } \omega(k)$ при $\alpha \ll 1$ представлена на рис. 1.1. Здесь же отложены инкременты колебаний.

3. Неустойчивость электронного потока произвольной плотности. Рассмотрим возмущения в системе плазма — пучок без предположения о малости отношения $\alpha \equiv n_1/n_0$. Будем считать, что компонента 0 покоится ($V_0 = 0$), а компонента 1 движется со скоростью V . При этом дисперсионное уравнение имеет прежний вид

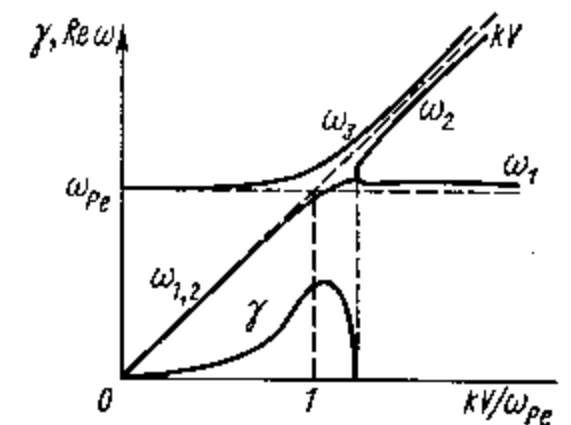


Рис. 1.1. Ветви колебаний системы плазма — пучок

(1.46). Параметр α , входящий в это уравнение, без ограничения общности можно полагать не большим единицы

$$0 < \alpha \leq 1, \quad (1.53)$$

поскольку случай $\alpha > 1$ при переходе в другую систему отсчета и переобозначений индексов 0 и 1 сводится к случаю $\alpha < 1$. Плазменную частоту более плотной компоненты обозначим ω_p , опуская индексы 0 и e.

Заметим, что при $k_{\parallel} \gg \omega_p/V$ все решения (1.46) вещественны. Неустойчивость начинается при k_{\parallel} , меньших некоторого граничного:

$$k_{\parallel} < k_{гр}. \quad (1.54)$$

При k_{\parallel} , несколько меньших $k_{гр}$, два из четырех корней уравнения (1.46) становятся комплексно сопряженными с $\gamma \neq 0$. Левая часть уравнения (1.46), обозначаемая в дальнейшем ε_0 , при таких k_{\parallel} равна

$$\varepsilon_0 = \frac{[(\omega - \text{Re } \omega_{1,2}(k))^2 + \gamma^2] (\omega - \omega_3(k)) (\omega - \omega_4(k))}{\omega^2 (\omega - k_{\parallel} V)^2}. \quad (1.55)$$

Из (1.55) следует, что границе устойчивости [$\gamma(k_{гр}) = 0$] соответствует двойной вещественный корень уравнения (1.46). Это означает, что на границе устойчивости помимо уравнения (1.46),

$$\varepsilon_0(\omega_{гр}, k_{гр}) = 0, \quad (1.56)$$

должно удовлетворяться также соотношение

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_{гр}, k_{\parallel}=k_{гр}} = 0. \quad (1.57)$$

Подставляя сюда вместо ε_0 выражение (1.46), находим

$$k_{гр} = (\omega_p/V) (1 + \alpha^{1/3})^{3/2}; \quad (1.58)$$

$$\omega_{гр} = \omega_p (1 + \alpha^{1/3})^{1/2}. \quad (1.59)$$

Поясним результат (1.57) с помощью рис. 1.2. Вещественным корням дисперсионного уравнения соответствуют точки пересечения кривой $\varepsilon_0(\omega)$ с осью абсцисс. Если волновое число k_{\parallel} таково, что ε_0 обращается в нуль только дважды, как в случае рис. 1.2, то число вещественных

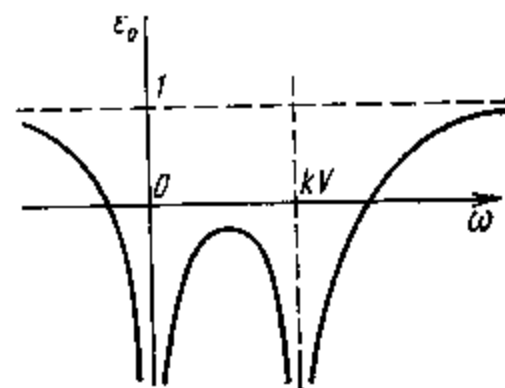


Рис. 1.2. Диэлектрическая проницаемость системы плазма — пучок при вещественных ω

корням дисперсионного уравнения соответствуют точки пересечения кривой $\varepsilon_0(\omega)$ с осью абсцисс. Если волновое число k_{\parallel} таково, что ε_0 обращается в нуль только дважды, как в случае рис. 1.2, то число вещественных

корней равно двум. Всего же уравнение (1.46) имеет четыре корня. Следовательно, два других — комплексны. Мнимая часть комплексных корней исчезает при значениях k_{\parallel} , отвечающих точкам касания оси абсцисс изображенной параболы. Это и соответствует условию (1.57).

§ 1.6. Неустойчивость относительного движения электронов и ионов

Пусть электронная компонента плазмы движется относительно ионной со скоростью V . Согласно (1.35) и (1.36'), колебания плазмы в этом случае описываются дисперсионным уравнением

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_{\parallel} V)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0. \quad (1.60)$$

Поскольку $\omega_{pi}^2/\omega_{pe}^2 = m_e/m_i \ll 1$, это уравнение с точностью до переобозначений совпадает с дисперсионным уравнением (1.46) для плазмы и пучка малой плотности, такого, что

$$\alpha = m_e/m_i. \quad (1.61)$$

В этом смысле эффективная плотность ионов равна $(m_e/m_i) n_0$.

Соотношения, характеризующие электроно-ионную неустойчивость, можно получить, используя результаты п. 2 § 1.5. Для этого в последних помимо замены (1.61) нужно сделать также следующие преобразования:

$$\omega \rightarrow \omega - k_{\parallel} V; \quad V \rightarrow -V. \quad (1.62)$$

Это связано с тем, что в рассматриваемом случае движущейся является «более плотная» компонента. В результате находим, что частота спосовых колебаний типа (1.47)

$$\omega = \pm \omega_{pi} [1 - (\omega_{pe}/k_{\parallel} V)^2]^{-1/2}. \quad (1.63)$$

При $|k_{\parallel} V| < \omega_{pe}$ эта частота чисто мнимая, причем

$$\gamma = \omega_{pi} [(\omega_{pe}/k_{\parallel} V)^2 - 1]^{-1/2}. \quad (1.64)$$

Условие резонанса между спосовыми колебаниями ионов ($\omega \approx 0$) и электронными ленгмюровскими ($\omega =$

$= k_{||}V + \omega_{pe}$), как следует из (1.49) и (1.62), имеет вид

$$k_{||}V = -\omega_{pe}. \quad (1.65)$$

Поскольку в нулевом приближении по α частота колебаний равна нулю, то для полной вещественной части частоты резонансных возмущений имеем [ср. с (1.51)]

$$\text{Re } \omega = \text{Re } \omega^{(1)} = -\frac{1}{2^{4/3}} \omega_{pe} (m_e/m_i)^{1/3}. \quad (1.66)$$

Инкремент этих колебаний равен

$$\gamma = \omega_{pe} \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}. \quad (1.67)$$

Рассмотренная здесь неустойчивость часто называется неустойчивостью типа Бунемана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тензор диэлектрической проницаемости

Введем вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j}. \quad (\text{П.1.1})$$

Будем считать, что плотность тока \mathbf{j} вычислена и связана с полем соотношением

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (\text{П.1.2})$$

Величину $\sigma_{\alpha\beta}$ назовем тензором проводимости. Подставляя (П.1.2) в (П.1.1), получаем связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} :

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (\text{П.1.3})$$

Тензор

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta} \quad (\text{П.1.4})$$

назовем тензором диэлектрической проницаемости.

Пусть вид $\varepsilon_{\alpha\beta}$ известен. Тогда уравнения Максвелла (II) могут быть сведены к следующей системе трех уравнений для компонент возмущенного электрического поля:

$$(\text{rot rot } \mathbf{E})_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (\text{П.1.5})$$

Дальнейшая процедура получения дисперсионного уравнения сводится к решению только этих трех уравнений.

Таким образом, введение тензора диэлектрической проницаемости разделяет общую задачу на две части: отыскание самой величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и решение уравнений Максвелла с известным $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

В случае однородной плазмы получить дисперсионное уравнение с помощью (П.1.5) весьма просто. Задавая электрическое поле в виде плоской волны $\mathbf{E} \approx \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, приходим к системе трех алгебраических уравнений для компонент \mathbf{E} . Приравнивание нулю определителя этой системы приводит к искомому дисперсионному уравнению

$$\left| N^2 \left(\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta} \right| = 0. \quad (\text{П.1.6})$$

Входящую сюда величину $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$ назовем квадратом показателя преломления.

Рассмотрим, как с помощью (П.1.6) получаются уравнения для ленгмюровских колебаний и электромагнитных волн в холодной и покоящейся плазме — уравнения (1.14) и (1.15). Для этого нужно знать вид $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Поскольку, согласно (1.10), в случае холодной покоящейся плазмы

$$\mathbf{j} = e_0 n_0 \mathbf{V}'_e = \frac{ie_e^2}{m_e \omega} \mathbf{E}, \quad (\text{П.1.7})$$

то выражение для $\varepsilon_{\alpha\beta}$, как следует из (П.1.2) и (П.1.4), имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \varepsilon, \quad (\text{П.1.8})$$

где

$$\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2 \quad (\text{П.1.9})$$

Пусть оси x, y координатной системы перпендикулярны к \mathbf{k} , а $z \parallel \mathbf{k}$. Тогда, используя (П.1.8), уравнение (П.1.6) можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{П.1.10})$$

Видно, что (П.1.10) сводится к системе (1.14) и (1.15). Следует также отметить, что уравнение (1.15) содержится в (П.1.10) дважды. Это соответствует тому факту, что электромагнитные волны, описываемые уравнением (1.16), могут быть поляризованы двойко (например, $\mathbf{E} \parallel x$, либо $\mathbf{E} \parallel y$).

Укажем теперь, как из общего дисперсионного уравнения (П.1.6) получается более простое дисперсионное уравнение потенциального приближения. Потенциальные возмущения — это такие, у которых магнитное поле достаточно мало по сравнению с электрическим. Поскольку $\mathbf{V}'_e \approx c\mathbf{k}E'/\omega$, это означает, что в потенциальных возмущениях параметр ck/ω достаточно велик, т. е. $N^2 \rightarrow \infty$. Поэтому рецепт перехода в (П.1.6) к потенциальному приближению состоит в следующем: нужно разложить левую часть (П.1.6) в ряд по

$1/N^2$ и затем устремить N^2 к бесконечности. При этом

$$k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta = 0. \quad (\text{П.1.11})$$

В том, что это уравнение соответствует потенциальным возмущениям, можно убедиться с помощью уравнения (П.1.5). Действительно, взяв дивергенцию от этого уравнения и используя после этого условие потенциальности $E = -ik\psi$ (приближенное или точное), приходим к (П.1.11). Вследствие нестрогой потенциальности колебаний подстановка $E = -ik\psi$ в левую часть равенства (П.1.5) могла бы привести к неправильным результатам.

Величину

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k^2} k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta \quad (\text{П.1.12})$$

назовем скалярной диэлектрической проницаемостью. Эта величина уже использовалась выше (см., например, § 1.4).

В § 1.4 указывалось, что величина ε_0 может быть представлена в виде $\varepsilon_0 = 1 - 4\pi\chi/k^2$, где χ определено соотношением $\rho = \chi\psi$. Убедиться в тождественности этих двух выражений можно, приняв во внимание уравнение непрерывности электрического заряда, вытекающее из уравнения (1.2) (либо из уравнений Максвелла):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (\text{П.1.13})$$

Подставляя сюда \mathbf{j} в форме (П.1.2), используя предположение о потенциальности $E = -ik\psi$ и сравнивая получающееся так выражение для ρ с выражением для $\rho = \chi\psi$, имеем

$$\chi = -\frac{1}{\omega} k_\alpha \sigma_{\alpha\beta} k_\beta \quad (\text{П.1.14})$$

С помощью (П.1.4) и (П.1.14) находим, что (П.1.12) действительно сводится к (1.35).

Дисперсионное уравнение потенциальных возмущений гораздо проще общего уравнения (П.1.6). Однако для обоснования самого предположения о потенциальности, вообще говоря, необходимо обратиться к общему дисперсионному уравнению.

Библиографический обзор к гл. 1

1. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases.—«Phys. Rev.», 1929, v. 33, p. 195.
Здесь выведены дисперсионные уравнения (1.14) и (1.15).
2. Haefl A. V. Space-charge wave amplification effects.—«Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 1532.
3. Pierce J. R. Possible fluctuations in electron streams due to ions.—«J. Appl. Phys.», 1948, v. 19, p. 231.
4. Bohm D., Gross E. P. Theory of plasma oscillations. V. Excitation and damping of oscillations.—«Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1864.

5. Ахвезер А. И., Файнберг Я. Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электропной плазмой.—«Докл. АН СССР», 1949, т. 69, с. 555.
В работах [2—5] независимо было получено дисперсионное уравнение системы холодных потоков и сделан вывод о возможности самопроизвольного возбуждения колебаний. Количественное исследование временного нарастания возмущений проводилось в работах [4, 5]. Неустойчивость потоков равной плотности (п. 1 § 1.5) исследовалась в работе [4]. Неустойчивость пучка малой плотности (п. 2 § 1.5) — в работах [4, 5]. Максимальный инкремент неустойчивости пучка малой плотности [формула (1.52)] был найден в работе [5]. В работе [2] рассматривались потоки равной плотности (п. 1 § 1.5), а в работе [3] — поток электронов, движущихся относительно ионов (§ 1.6).
6. Bailey V. A. The relativistic theory of electro-magnetonic waves.—«Phys. Rev.», 1951, v. 83, p. 439.
Получен критерий неустойчивости потоков произвольной плотности — формула (1.58).
7. Kahn E. D. The collision of two ionized streams.—«J. Fluid Mechanics», 1957, v. 2, p. 601.
Обсуждается неустойчивость потоков равной плотности (п. 1 § 1.5).
8. Buneman O. Instability, turbulence and conductivity in current-carrying plasma.—«Phys. Rev. Lett.», 1958, v. 1, p. 8.
9. Buneman O. Dissipation of currents in ionized media.—«Phys. Rev.», 1959, v. 115, p. 503.
В работах [8, 9] исследовалась неустойчивость относительного движения электронов и ионов (§ 1.6).
10. Имшенник В. С., Морозов Ю. П. Анализа неустойчивости пучка заряженных частиц в электропной плазме.—«Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 640.
Производится подробный количественный анализ пучковой неустойчивости. Приведена картина ветвей колебаний системы плазма — пучок, качественно представленная на рис. 1.1.
11. Bludman S. A., Watson K. M., Rosenbluth M. N. Statistical mechanics of relativistic streams. II.—«Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 747.
12. Singhaus H. E. Beam-temperature effects on the electrostatic instability for an electron beam penetrating a plasma.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1534.
13. Böhmer H., Chang J., Raether M. Influence of collisions on the instability of cold and warm electron beams in plasma.—«Phys. Fluids», 1971, v. 24, p. 150.
В работах [11—13] обсуждается пучковая неустойчивость столкновительной плазмы, описываемая дисперсионным уравнением

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_e)} - \frac{\alpha\omega_{pe}^2}{(\omega - kV)^2} = 0,$$

где ν_e — частота столкновений электронов покоящейся компоненты плазмы. Показано, что при большей частоте столкновений инкремент (1.52) заменяется на $\gamma = \omega_{pe} (\alpha\omega_{pe}/2\nu_e)^{1/2}$.

ГЛАВА 2
КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЕБАНИЙ
ПЛАЗМЫ И ОБЩИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ
И НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 2.1. Задача о собственных
колебаниях в кинетике

Тепловое движение частиц ослабляет гидродинамические механизмы развития неустойчивостей, однако далеко не во всех случаях приводит к полной стабилизации плазмы. Причина тому — проявляющееся при большом тепловом разбросе резонансное взаимодействие частиц с колебаниями. Последнее может приводить к кинетическим неустойчивостям. (В плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям резонансное взаимодействие обуславливает открытое Ландау бесстолкновительное затухание колебаний.)

Настоящая глава является введением в теорию кинетических неустойчивостей. Здесь обсуждаются методы исследования колебаний плазмы с непрерывным распределением частиц по скоростям и специфичные для такой плазмы эффекты. Формулируются также некоторые общие критерии, позволяющие в ряде случаев заранее ответить на вопрос об устойчивости плазмы с тем или иным конкретным распределением частиц по скоростям.

При учете теплового движения частиц возмущенное поведение плазмы описывается с помощью линеаризованного уравнения (I):

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{k}\mathbf{v}f' = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E}' + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{B}' \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.1)$$

Здесь, как и в гл. 1, пренебрегается столкновениями и статическим магнитным полем \mathbf{B}_0 . Равновесное состояние плазмы, характеризуемое функцией распределения f_0 , предполагается пространственно-однородным. Благодаря этому пространственную зависимость возмущений можно выбрать в виде плоской волны [см. (1.13)], что мы здесь и предполагаем. В дальнейшем штрихи у возмущенных величин f' , \mathbf{E}' , \mathbf{B}' будем, как правило, опускать.

Если при $t = 0$ система была выведена из равновесного состояния, так что

$$f(t, \mathbf{v}) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ g(\mathbf{v}), & t = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

то ее поведение при $t > 0$ может быть прослежено методом Лапласа аналогично тому, как это делалось в задаче § 1.3 о ленгмюровских колебаниях холодной плазмы.

Отрапичиваясь рассмотрением случая потенциальных возмущений и следуя изложенной в задаче § 1.3 процедуре лаплас-преобразования, из (1.1) и уравнения Пуассона (II) находим:

$$f_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{p + i\mathbf{k}\mathbf{v}} \left[g(\mathbf{v}) + \frac{i\mathbf{k}e}{m} \psi_p \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right]; \quad (2.3)$$

$$\psi_p = \frac{4\pi e}{k^2 \epsilon_0(ip)} \int \frac{g(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{ip - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (2.4)$$

Здесь величина $\epsilon_0(ip)$ имеет смысл скалярной диэлектрической проницаемости при

$$\omega = ip. \quad (2.5)$$

Она определяется соотношением

$$\epsilon_0(ip) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v}}{ip - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (2.6)$$

С помощью (2.3), (2.4) и (1.29) находим искомый вид функций $f(t)$ и $\psi(t)$ при $t > 0$:

$$f(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{\exp(pt)}{p + i\mathbf{k}\mathbf{v}} \left[g(\mathbf{v}) + \frac{i\mathbf{k}e}{m} \psi_p \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right] dp; \quad (2.7)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{4\pi e}{k^2} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{\exp(pt)}{\epsilon_0(ip)} \int \frac{g(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{ip - \mathbf{k}\mathbf{v}} dp. \quad (2.8)$$

Как и в случае холодной плазмы, интегралы (2.7) и (2.8) сводятся к вычетам в особых точках подынтегрального выражения, а частоты ω собственных колебаний с $\psi \neq 0$ определяются нулями функции $\epsilon_0(ip)$, т. е. $\omega = ip_0$, где p_0 — решение уравнения

$$\epsilon_0(ip_0) = 0. \quad (2.9)$$

Для фактического использования уравнения (2.9) необходимо доопределить функцию $\varepsilon_0(i p)$ при $\text{Re } p < 0$. Как следует из структуры интеграла (2.8), для этого $\varepsilon_0(i p)$, определенное при $\text{Re } p \geq 0$, надо аналитически продолжить в область $\text{Re } p < 0$. Это приводит к однозначному способу вычисления несобственного интеграла в (2.6) (правило Ландау).

Из приведенного выше рассмотрения следует, что задача об определении частот собственных колебаний плазмы с произвольным распределением частиц по скоростям, как и холодной плазмы, сводится к нахождению корней дисперсионного уравнения. В этом смысле анализ задачи с начальными условиями нужен только для того, чтобы установить правило вычисления несобственного интеграла по скоростям в выражении для диэлектрической проницаемости. Установив это правило для рассмотренного здесь частного случая колебаний, будем считать его универсальным. Исходя из этого, в дальнейшем при исследовании других типов колебаний будем следовать, как и в гл. 1, методу Фурье-гармоник, не прибегая к задаче с начальными условиями.

Выражение для диэлектрической проницаемости ε_0 в дальнейшем будем рассматривать как функцию частоты колебаний ω , а не переменной p , т. е. примем его равным

$$\varepsilon_0(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v} dv}{\omega - kv}. \quad (2.10)$$

Обход особой точки в интеграле по скоростям при этой форме записи ε_0 должен совершаться так, как будто $\text{Im } \omega > 0$.

В ряде случаев удобно пользоваться другой формой записи уравнения (2.10), получающейся интегрированием по частям:

$$\varepsilon_0(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{f_0 dv}{(\omega - kv)^2}. \quad (2.11)$$

Задача. Получить выражение для диэлектрической проницаемости горячей плазмы, исходя из гидродинамических уравнений и предполагая число потоков бесконечным.

Решение. Исходим из уравнений (1.35) и (1.36'). Поскольку один поток отличается от другого величиной своей скорости, суммирование в (1.35) по всем сортам потоков (с заданными m и e) можно заменить суммированием по скоростям. Учитывая, что каждому потоку

соответствует своя плотность, результат можно представить в виде

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{\alpha} \frac{n_0(V^{(\alpha)})}{(\omega - kV^{(\alpha)})^2}. \quad (2.11')$$

Этот результат не изменится, если суммирование по конечному числу потоков распространить на бесконечный набор $V^{(\alpha)}$. Будем считать, что скорости соседних (по скорости V) потоков этого бесконечного набора разнятся на одну и ту же величину $\Delta V \ll V^{(\alpha)}$. Обозначая число частиц, приходящихся на единичный интеграл скорости

$$f_0(V^{(\alpha)}) = \frac{n_0(V^{(\alpha)})}{\Delta V},$$

уравнение (2.11') можно записать в виде

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{V^{(\alpha)}=-\infty}^{\infty} \frac{f_0(V^{(\alpha)}) \Delta V}{(\omega - kV^{(\alpha)})^2}. \quad (2.11'')$$

Поскольку из анализа задачи с начальными условиями (см. § 2.1) вытекает, что частоту колебаний при получении диэлектрической проницаемости следует считать комплексной с $\text{Im } \omega > 0$, будем полагать $k\Delta V < \text{Im } \omega$. Это позволяет перейти в (2.11'') от суммирования к интегрированию, после чего (2.11'') сводится к (2.11).

§ 2.2. Бесстолкновительная диссипация энергии колебаний

Интеграл в (2.10) можно вычислить, предполагая ω вещественным и заменяя ω в знаменателе $\omega + i\Delta$, где Δ — бесконечно малое положительное число. Тогда, используя соотношение

$$\frac{1}{\omega - kv + i\Delta} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} - i\pi \delta(\omega - kv), \quad (2.12)$$

диэлектрическую проницаемость можно представить в виде

$$\varepsilon_0(\omega, k) = \text{Re } \varepsilon_0(\omega, k) + i \text{Im } \varepsilon_0(\omega, k), \quad (2.13)$$

где

$$\text{Re } \varepsilon_0 = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \mathcal{P} \int \frac{k \partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv; \quad (2.14)$$

$$\text{Im } \varepsilon_0 = - \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \int k \frac{\partial f_0}{\partial v} \delta(\omega - kv) dv. \quad (2.15)$$

В (2.12) и (2.14) \mathcal{P} — главное значение интеграла.

Из этих соотношений следует, что диэлектрическая проницаемость комплексна, если при скоростях, близких к фазовой скорости возмущения, функция распределения частиц обладает ненулевой производной. При комплексном ϵ_0 (вычисленном при вещественных ω) комплексна и частота собственных колебаний плазмы. Мнимую часть частоты собственных колебаний легко найти в случае, когда она мала по сравнению с вещественной, что возможно при малом $\text{Im } \epsilon_0$. Остановимся на этом случае подробнее.

При $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ мнимую добавку к частоте достаточно учесть только в функции $\text{Re } \epsilon_0(\omega)$. Разлагая последнюю в ряд по $\text{Im } \omega$, подставляя результат в уравнение $\epsilon_0 = 0$ и разделяя в нем вещественную и мнимую части, получаем следующие уравнения для вещественной и мнимой частей частоты колебаний:

$$\text{Re } \epsilon_0(\omega_k, \mathbf{k}) = 0; \quad (2.16)$$

$$\gamma_k = -\frac{\text{Im } \epsilon_0(\omega_k, \mathbf{k})}{\partial \text{Re } \epsilon_0(\omega_k, \mathbf{k}) / \partial \omega_k}, \quad (2.17)$$

где

$$\omega_k \equiv \text{Re } \omega(\mathbf{k}), \quad \gamma_k \equiv \text{Im } \omega(\mathbf{k}).$$

Уравнение (2.17) может быть преобразовано к виду, допускающему энергетическую трактовку процесса нарастания или затухания колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \omega_k \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0(\omega_k, \mathbf{k})}{\partial \omega_k} \frac{|E(t)|^2}{8\pi} \right\} = \\ = -\frac{\omega_k \text{Im } \epsilon_0}{4\pi} |E|^2 \equiv -\text{Re } \sigma |E|^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь E_k, ω_k означает $E_k, \omega_k \exp(\gamma t)$, а σ — проводимость. Величина $\text{Re } \sigma$ — активное сопротивление, а выражение $\text{Re } \sigma |E|^2$ характеризует колебательную энергию, диссипируемую в единицу времени. Поэтому выражению, стоящему под знаком $\partial/\partial t$, можно придать смысл энергии колебаний:

$$W_k = \omega_k \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0(\omega_k)}{\partial \omega_k} \frac{|E|^2}{8\pi}, \quad (2.19)$$

а уравнение (2.18) трактовать как уравнение баланса энергии колебаний.

Задача. Показать, что энергия колебаний, определенная равенством (2.19), равна сумме энергии нерезонансных частиц и электростатической энергии.

Решение. Движение частицы в электрическом поле описывается уравнениями

$$dv/dt = \frac{e}{m} E(x(t), t); \quad (2.20')$$

$$dx/dt = v(t). \quad (2.20'')$$

Полагая здесь

$$E(x, t) = \bar{E} \cos(\omega t - kx) \exp(\gamma t), \quad (2.21)$$

где \bar{E} не зависит от времени, $\gamma > 0$, и представляя v и x в виде ряда по степеням E :

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \\ x &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

находим:

$$v_1 = \frac{e\bar{E}}{m} \cdot \frac{\exp(\gamma t)}{\omega'^2 + \gamma^2} [\gamma \cos(\omega' t - kx_0) + \omega' \sin(\omega' t - kx_0)];$$

$$x_1 = \frac{e\bar{E}}{m} \cdot \frac{\exp(\gamma t)}{\omega'^2 + \gamma^2} [(\gamma^2 - \omega'^2) \cos(\omega' t - kx_0) + 2\gamma\omega' \sin(\omega' t - kx_0)];$$

$$(v_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}}{m} \right)^2 \frac{k\omega'}{(\omega'^2 + \gamma^2)^2} \exp(2\gamma t). \quad (2.23)$$

Здесь $\omega' = \omega - kv_0$, а в v_2 учтена только необходимая для дальнейшего медленно меняющаяся часть.

С помощью (2.23) получаем выражение для колебательной энергии частицы, не падающей в резонанс с волной (т. е. такой, что $\omega' \gg \gamma$):

$$\left\langle \left(\frac{mv^2}{2} \right) \right\rangle_{\text{колеб}} \equiv \left\langle \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} \right\rangle = \frac{(e\bar{E})^2 \exp(2\gamma t)}{4m\omega'^2} \left(2 \frac{\omega}{\omega'} - 1 \right). \quad (2.24)$$

Колебательная энергия всех нерезонансных частиц равна

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\text{колеб}} f_0(v_0) dv_0 &= \frac{e^2 |\bar{E}|^2 \exp(2\gamma t)}{4m} \int \left(2 \frac{\omega}{\omega'} - 1 \right) \times \\ &\times \frac{f_0(v_0)}{\omega'^2} dv_0 = \frac{|\bar{E}|^2 \exp(2\gamma t)}{16\pi} \left(\omega \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial \omega} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь использованы определение ϵ_0 и уравнение $\epsilon_0 = 0$. Складывая энергию частиц с электростатической, которая при задании поля

в виде (2.21) равна $\frac{|\bar{E}|^2}{16\pi} \equiv \frac{|E_k|^2}{8\pi}$, получаем (2.19).

§ 2.3. Энергетическая классификация слабо растущих возмущений

В случае, если диссипативная часть диэлектрической проницаемости достаточно мала и если в пренебрежении диссипацией колебания не раскачиваются и не затухают, уровень колебаний характеризуется их энергией, определенной соотношением (2.19). Введенная этим соотношением энергия, как показано в задаче § 2.2, имеет наглядный смысл — она равна сумме электростатической энергии поля колебаний и возмущенной энергии нерезонансных частиц. Например, энергия ленгмюровских колебаний холодной покоящейся плазмы ($\text{Re } \epsilon_0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, $\omega \partial \text{Re } \epsilon_0 / \partial \omega = 2$) равна удвоенной электростатической энергии, усредненной по периоду колебаний:

$$W_k = |E_k|^2 / 4\pi. \quad (2.26)$$

Этот результат нетрудно понять, если учесть, что в ленгмюровских колебаниях энергия попеременно переходит от поля к зарядам и обратно.

Из (2.19) следует, что энергия колебаний может быть не только положительной величиной, но и отрицательной. Простейшим примером среды, в которой колебания могут обладать отрицательной энергией, является движущаяся холодная плазма. Для нее

$$\text{Re } \epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kV)^2}; \quad (2.27)$$

$$\omega_k = kV \pm \omega_p, \quad (2.28)$$

так что

$$\omega_k = \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial \omega_k} = 2 \left(1 \pm \frac{kV}{\omega_p} \right). \quad (2.29)$$

Видно, что если $kV/\omega_p > 1$, то для решений со знаком минус

$$\omega_k \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial \omega_k} < 0 \quad (2.30)$$

и, согласно (2.19),

$$W_k < 0. \quad (2.31)$$

Как следует из (2.18), волны с положительной энергией раскачиваются в случае отрицательной проводимости, $\text{Re } \sigma < 0$. При $W_k < 0$ амплитуда волны нарастает, если проводимость имеет обычный смысл ($\text{Re } \sigma > 0$).

Ясно, что знак энергии колебаний не инвариантен по отношению к изменению системы отсчета. То же самое относится к знаку проводимости. Нетрудно, однако, убедиться, что не зависят от системы отсчета и величины $\partial \text{Re } \epsilon(\omega_k) / \partial \omega_k$ и $\text{Im } \epsilon(\omega_k)$, а вместе с ними и инкремент колебаний. Это следует из того, что при преобразовании координат $x \rightarrow x' + Vt$ входящая в $\epsilon(\omega_k)$ частота ω заменяется частотой $\omega' - kV$, но именно по такому закону преобразуется и частота собственных колебаний: $\omega_k \rightarrow \omega'_k - kV$. Поэтому входящие в выражения для γ величины $\partial \text{Re } \epsilon_0 / \partial \omega$ и $\text{Im } \epsilon_0$ всегда берутся при значении $\omega = \omega_k$ и вследствие этого γ неизменно.

В ряде случаев та или иная система отсчета может быть физически выделена среди других. Например, при движении через плазму пучка малой плотности такой системой является система покоя плазмы, а в более общем случае — лабораторная система. В такого рода выделенной системе отсчета все диссипативные процессы раскачки и затухания колебаний можно свести к следующим четырём типам:

а) затуханию волн положительной энергии за счет нормальной диссипации

$$W_k > 0, \sigma_k > 0; \quad (2.32)$$

б) раскачке волн положительной энергии за счет аномальной диссипации

$$W_k > 0, \sigma_k < 0; \quad (2.33)$$

в) раскачке волн отрицательной энергии за счет нормальной диссипации

$$W_k < 0, \sigma_k > 0; \quad (2.34)$$

г) затуханию волн отрицательной энергии за счет аномальной диссипации

$$W_k < 0, \sigma_k < 0. \quad (2.35)$$

Как следует из выражения для диссипативной части диэлектрической проницаемости (2.15), нормальная диссипация имеет место в случае, когда производная функции распределения резонансных частиц отрицательна:

$$(\partial f_0 / \partial v)_{v=\omega/k} < 0, \quad (2.36)$$

аномальна — при

$$(\partial f_0 / \partial v)_{v=\omega/k} > 0. \quad (2.37)$$

Типичные формы функции распределения плазмы, колебания которой обладают положительной энергией, приведены на рис. 2.1. В первом случае (рис. 2.1, а) возможна только нормальная диссипация, а во втором (рис. 2.1, б) — также и аномальная.

Соотношения (2.36) и (2.37) однозначно характеризуют энергетический баланс резонансных частиц. Они имеют наглядный смысл, состоящий в следующем. При взаимодействии с волной резонансных частиц суммарная энергия последних увеличивается или уменьшается в зависимости от того, каких частиц больше — несколько отстающих от волны ($\partial f_0 / \partial v < 0$) или несколько опережающих волну ($\partial f_0 / \partial v > 0$). Волна подгоняет отстающие частицы (отдаст энергию) и замедляет опережающие (отбирает энергию). Поэтому суммарный эффект определяется знаком $\partial f_0 / \partial v$.

Примером среды, в которой возможно существование волн с отрицательной энергией, является рассматриваемая в § 3.3 система, состоящая из холодного пучка и горячей покоящейся плазмы. Функция распределения частиц в этом случае имеет вид, представленный на рис. 2.1, в. Неустойчивость обусловлена взаимодействием с колебаниями резонансных частиц горячей плазмы, а для них $\partial f_0 / \partial v < 0$. Поэтому резонансные частицы плазмы отбирают энергию (нормальная диссипация, $\sigma > 0$) и приводят к уменьшению энергии колебаний, $dW/dt < 0$. Вследствие отрицательности W это соответствует нарастанию абсолютного значения W , а вместе с тем — нарастанию электрического поля.

Фактическим резервуаром энергии, часть которой передается резонансным частицам горячей плазмы и часть — электрическому полю, является полная энергия движущегося пучка, равная сумме колебательной энергии частиц и энергии их равновесного движения:

$$W_{\text{полн}} = W_{\text{колеб}} + W_{\text{равн}}. \quad (2.38)$$

Колебательная энергия в соответствии с предположением о малости амплитуды колебаний мала по сравнению

с $W_{\text{равн}}$, так что

$$W_{\text{полн}} > 0. \quad (2.39)$$

Используя понятие полной энергии, энергетический баланс при раскатке волн с $W < 0$ можно записать в следующем виде:

$$\delta(W_{\text{эл.п.}} + W_{\text{рез. част}}) = -\delta W_{\text{полн}}. \quad (2.40)$$

Здесь $W_{\text{эл. п.}}$, $W_{\text{рез. част}}$ и $W_{\text{полн}}$ положительны.

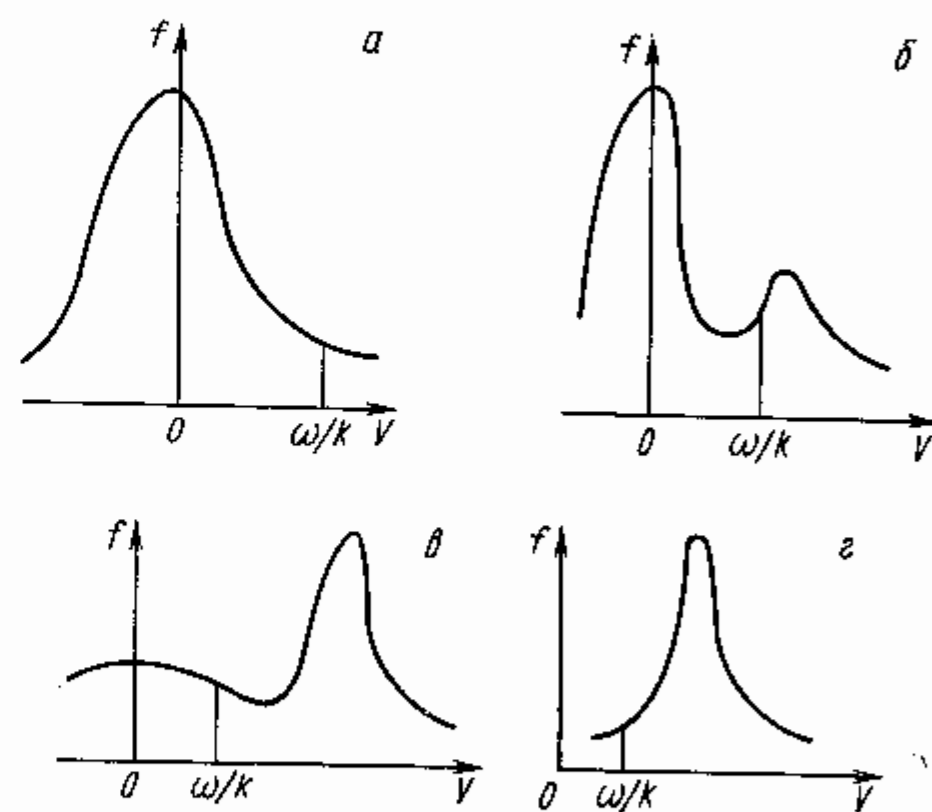


Рис. 2.1. Распределение частиц по скоростям, соответствующее различным типам диссипативных процессов:

$$\begin{aligned} \text{а} - W > 0, \sigma > 0; \quad \text{б} - W > 0, \sigma > 0; \\ \text{в} - W < 0, \sigma > 0; \quad \text{г} - W < 0, \sigma > 0 \end{aligned}$$

При раскатке волн с $W < 0$ резонансные частицы служат своего рода посредником, осуществляющим преобразование упорядоченной энергии пучка в колебательную. При этом не вся энергия, отобранная у пучка, переходит в колебательную, — часть ее идет на ускорение резонансных частиц.

§ 2.4. Затухание ленгмюровских колебаний в максвелловской плазме

1. Диэлектрическая проницаемость максвелловской плазмы. Пусть распределение электронов по скоростям — максвелловское:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right). \quad (2.41)$$

В этом случае выражения (2.14) и (2.15) принимают вид*

$$\operatorname{Re} \epsilon_0 - 1 = \frac{1}{(kd)^2} \left\{ 1 - \frac{2\omega}{|k|v_T} \exp \left[-\left(\frac{\omega}{kv_T} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\omega/|k|v_T} \exp(t^2) dt \right\}; \quad (2.42)$$

$$\operatorname{Im} \epsilon_0 = \frac{1}{(kd)^2} \frac{\sqrt{\pi} \omega}{|k|v_T} \exp \left(-(\omega/kv_T)^2 \right). \quad (2.43)$$

Здесь $v_T = (2T/m)^{1/2}$ — тепловая скорость, $d = (T/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ — дебаевский радиус. Выражения (2.42) и (2.43) получены для вещественных ω . Аналитическое продолжение этих выражений на область комплексных ω сводится к простой замене в них вещественного ω комплексным. Объединяя (2.42) и (2.43), находим, что при произвольном комплексном ω диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{k^2 d^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k|v_T} W \left(\frac{\omega}{|k|v_T} \right) \right], \quad (2.44)$$

где

$$W(x) = \exp(-x^2) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(t^2) dt \right). \quad (2.45)$$

* Интегрирование по скоростям удобно проводить, используя преобразование

$$(\omega - i\Delta - kv)^{-1} = -i \int_0^\infty \exp[i(\omega + i\Delta - kv)\tau] d\tau.$$

Функция W называется интегралом вероятности от комплексного аргумента или функцией Крампа. Она табулирована в книге В. Н. Фаддеевой и Н. М. Терентьева. Помимо этой функции табулирована также связанная с ней функция

$$Z(x) = i \sqrt{\pi} x W(x). \quad (2.46)$$

(В книге Фрида и Конте, в которой даны таблицы функции Z , последняя обозначена символом W .)

В случае, когда аргумент W велик либо мал по сравнению с единицей, эту функцию можно аппроксимировать следующими приближенными формулами, вытекающими из (2.45):

$$\text{а) } |x| \gg 1,$$

$$W(x) = \frac{i}{\sqrt{\pi} x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \dots \right) + \exp(-x^2); \quad (2.47)$$

$$\text{б) } |x| \leq 1,$$

$$W(x) = 1 + \frac{2ix}{\sqrt{\pi}} + \dots \quad (2.48)$$

2. Затухание ленгмюровских колебаний при $\omega \gg kv_T$. Приближению холодной плазмы, обсуждавшемуся в гл.1, соответствует случай

$$\omega \gg kv_T. \quad (2.49)$$

Используя уравнения (2.44), (2.45), (2.47), находим, что при $\omega/kv_T \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение $\epsilon_0 = 0$ сводится к уравнению (1.14). При больших, но конечных значениях параметра ω/kv_T диэлектрическая проницаемость комплексна, причем ее мнимая часть экспоненциально мала:

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 T}{m\omega^2} \right) + \\ + \frac{i \sqrt{\pi}}{k^2 d^2} \frac{\omega}{|k|v_T} \exp(-\omega^2/k^2 v_T^2). \quad (2.50)$$

В этом случае для нахождения вещественной и мнимой частей частоты колебаний можно воспользоваться уравнениями (2.16) и (2.17). Первое из них при подстановке

в него (2.50) дает

$$\omega_k^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 d^2). \quad (2.51)$$

Условие $\omega \gg kv_T$ для ленгмюровских колебаний приводит к ограничению на их длину волны снизу, которое, согласно (2.51), имеет вид

$$k^2 d^2 \ll 1. \quad (2.52)$$

Из уравнения (2.17) с учетом (2.50) и (2.51) находим

$$\gamma_k = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{(|k|d)^3} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2d^2 k^2}\right). \quad (2.53)$$

Инкремент колебаний отрицателен, что соответствует затуханию колебаний. Бесстолкновительное затухание колебаний установлено Л. Д. Лапдау и обычно называется затуханием Лапдау.

§ 2.5. Ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания

При $\omega/kv_{Te} \ll 1$ диэлектрическая проницаемость электронов почти не зависит от частоты:

$$(\epsilon_0^{(e)})_{\omega \ll kv_{Te}} \approx \frac{1}{k^2 d_e^2}. \quad (2.54)$$

Если температура ионов меньше температуры электронов, то с уменьшением частоты относительный вклад ионов в диэлектрическую проницаемость растет и при

$$(\omega/kv_{Te})^2 \ll m_e/m_i \quad (2.55)$$

ионы играют не меньшую роль, чем электроны. Выражение для диэлектрической проницаемости ионов имеет тот же вид, что и для электронов, с точностью до замены электронных индексов ионными. Если предположить, что распределение по скоростям как электронов, так и ионов является максвелловским, то с помощью уравнений (2.44) и (2.48) можно получить следующее дисперсионное уравнение для колебаний с $\omega \ll kv_{Te}$:

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} \left(1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k| v_{Te}}\right) + \frac{1}{k^2 d_i^2} [1 + i \sqrt{\pi} x W(x)] = 0, \quad (2.56)$$

Здесь

$$d_i = (T_i/4\pi e^2 n_0)^{1/2};$$

$$x = \omega/|k|v_{Ti}; \quad v_{Ti} = \sqrt{2T_i/m_i}.$$

Из структуры уравнения (2.56) следует, что описываемые им колебания не являются сильнозатухающими только в случае, если их фазовая скорость значительно превышает тепловую скорость ионов:

$$\omega/k \gg v_{Ti}. \quad (2.57)$$

При этом условии вещественная часть частоты, согласно (2.16) и (2.47), определяется соотношением

$$\operatorname{Re} \epsilon_0(\omega_k) = 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_k^2} \left(1 + \frac{3T_i k^2}{m_i \omega_k^2}\right) = 0, \quad (2.58)$$

а декремент колебаний имеет вид (2.17), где $\operatorname{Re} \epsilon_0(\omega_k)$ дается уравнением (2.58), а

$$\operatorname{Im} \epsilon_0(\omega_k) = \frac{1}{k^2 d_e^2} \frac{\sqrt{\pi} \omega_k}{|k| v_{Te}} \left[1 + \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \times \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega_k^2}{k^2 v_{Ti}^2}\right)\right]. \quad (2.59)$$

Квадрат частоты колебаний, описываемых уравнением (2.58), равен

$$\omega_k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 - 1/k^2 d_e^2} \left[1 + 3k^2 d_i^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 d_e^2}\right)\right]; \quad (2.60)$$

$$\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_0/m_i.$$

Отсюда следует, что условие (2.57) удовлетворяется, если

$$T_i/T_e + k^2 d_i^2 \ll 1. \quad (2.61)$$

Это означает, во-первых, что рассматриваемые слабозатухающие колебания возможны только в неизотермической плазме:

$$T_i \ll T_e, \quad (2.62)$$

и, во-вторых, что они не слишком коротковолновые;

$$(kd_i)^2 \ll 1. \quad (2.63)$$

По сравнению с дебаевским радиусом электронов d_e длина волны возмущений может быть большой и малой. Для длинноволновых возмущений

$$(kd_e)^2 \ll 1; \quad (2.64)$$

из (2.60) следует

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 T_e}{m_i} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right). \quad (2.65)$$

Эти колебания, как и звуковые колебания обычной жидкости, обладают линейным законом дисперсии, $\omega \sim k$. Учитывая эту аналогию, будем называть их **ионно-звуковыми**.

В случае возмущений, у которых

$$(kd_e)^2 \gg 1, \quad (2.66)$$

дисперсионное уравнение (2.60) сводится к следующему:

$$\omega_k^2 = \omega_{pi}^2 (1 + 3k^2 d_i^2). \quad (2.67)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2.51) для электронных ленгмюровских колебаний. В связи с этим будем называть колебания типа (2.67) **ионными ленгмюровскими**.

С помощью (2.17), (2.58) и (2.59) находим следующие выражения для декрементов затухания ионно-звуковых и ионных ленгмюровских колебаний:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ион. зв}} = & -\sqrt{\frac{\pi}{8}} k \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T_e}{T_i} + 3 \right) \right] \right\}; \quad (2.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ион. ленгм}} = & -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pi} \left(\frac{1}{|k| d_e} \right)^3 \left\{ \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left[-\left(\frac{\omega_{pi}}{k v_{Ti}} \right)^2 - \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (2.69) \end{aligned}$$

Задача. Получить дисперсионное уравнение низкочастотных колебаний плазмы, полагая ионы холодными, а электроны — рас-

пределенными в пространстве по закону Больцмана, $n_e = n_0 \times \exp(-e_e \psi / T_e)$ (Тонкс и Ленгмюр).

Решение. Линеаризуя уравнение для n_e , находим

$$n'_e = -\frac{e_e n_0}{T_e} \psi. \quad (2.70)$$

Возмущенная плотность ионов находится аналогично § 1.3:

$$n'_i = \frac{e_i k^2 n_0}{m_i \omega^2} \psi. \quad (2.71)$$

Подставляя (2.70) и (2.71) в уравнение Пуассона, приходим к уравнению (2.60) с $T_i = 0$.

§ 2.6. Достаточное условие устойчивости однородной бесстолкновительной плазмы

Исследование дисперсионного уравнения позволяет выяснить вопрос об устойчивости плазмы по отношению к какому-либо избранному классу возмущений. Примером таких избранных возмущений являются потенциальные колебания, описываемые уравнением (2.9) с ϵ_0 вида (2.10). Учет в дисперсионном уравнении эффектов непотенциальности или статического магнитного поля приводит к существенному его усложнению, и в этом случае для нахождения частоты колебаний необходимо делать новые упрощающие предположения.

Альтернативой метода дисперсионного уравнения является получение общих критериев устойчивости без конкретизации класса возмущений. Этот подход позволяет выделить заведомо устойчивые стационарные состояния и тем самым сужает набор стационарных состояний, для исследования устойчивости которых необходим детальный анализ дисперсионного уравнения.

Исходя из основных уравнений (I) и (II) для плазмы и электромагнитного поля, можно показать (теорема Бернштейна — Ньюкомба — Розенблюта), что однородная бесстолкновительная плазма устойчива относительно всех видов возмущений, если функция распределения каждого сорта частиц зависит только от квадрата скорости так, что при всех v^2

$$df_0/dv^2 \leq 0. \quad (2.72)$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим величину

$$L = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{E^2}{8\pi} + \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)^2}{8\pi} + \sum \int dv \left[\frac{mv^2}{2} (f - f_0) + G(f) \right] \right\}. \quad (2.73)$$

Здесь G — функция f , которую мы определим позже; \mathbf{B}_0 — постоянное магнитное поле; f_0 — равновесная функция распределения, не зависящая от координат и времени. Суммирование в (2.73) ведется по сортам зарядов, а интегрирование по всем \mathbf{r} и v . Величина L не зависит от времени (константа движения), что нетрудно проверить, взяв производную по времени от обеих частей равенства (2.73) и воспользовавшись уравнениями (I) и (II) (с $C_\alpha = 0$).

В возмущенном состоянии величины f , \mathbf{E} , \mathbf{B} , G имеют вид рядов по степеням амплитуды возмущений:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + f_1 + f_2 + \dots; \\ \mathbf{E} &= 0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots; \\ G(f) &= G(f_0) + (f_1 + f_2) G'(f_0) + \frac{1}{2} f_1^2 G''(f_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Подставляя (2.74) в (2.73), с точностью до квадратичных членов получаем

$$L = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \sum \int dv \left[\left(\frac{mv^2}{2} + G'(f_0) \right) (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} f_1^2 G''(f_0) \right] \right\}. \quad (2.75)$$

Видно, что L — квадратичный функционал, если G удовлетворяет условию

$$\frac{mv^2}{2} + G'(f_0) \equiv 0, \quad (2.76)$$

что возможно, если только f_0 зависит от квадрата скорости:

$$f_0 = f_0(v^2). \quad (2.77)$$

При условии (2.76) правая часть (2.75) заведомо равна сумме неотрицательных членов, если

$$G''(f_0) \geq 0. \quad (2.78)$$

С другой стороны, согласно (2.76), вторая производная равна

$$G''(f_0) = - \frac{m}{2df_0/dv^2}. \quad (2.79)$$

Поэтому условие (2.78) сводится к требованию о монотонном убывании f_0 с ростом v^2 , т. е. к (2.72). Тем самым сформулированная выше теорема доказана. (Возрастание какого-либо возмущения соответствовало бы возрастанию величины L , но L постоянно во времени.)

Согласно (2.72), к классу заведомо устойчивых распределений относится и максвелловское, для которого

$$G'(f_0) = T \ln \left\{ f/n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \right\}. \quad (2.80)$$

Доказанная теорема, как следует из доказательства, не предполагает отсутствия статического магнитного поля и даже его однородности. Поэтому полученный выше результат может быть использован и в задачах об устойчивости плазмы в магнитном поле, как в однородном, $\nabla B_0 = 0$, так и в неоднородном, $\nabla B_0 \neq 0$.

§ 2.7. Критерии устойчивости и неустойчивости плазмы относительно потенциальных возмущений при $\mathbf{B}_0 = 0$

Неустойчивость плазмы по отношению к потенциальным возмущениям означает, что дисперсионное уравнение $\epsilon_0(\omega, k) = 0$ имеет решения с $\text{Im } \omega > 0$. Иными словами, в случае неустойчивой плазмы функция $\epsilon_0(\omega, k)$ обращается в нуль в верхней полуплоскости ω , т. е. где-то в области, охватываемой контуром C на рис. 2.2. Поскольку, согласно определению (2.6), функция $\epsilon_0(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости и не имеет особенностей при $|\omega| \rightarrow \infty$ ($\epsilon(\infty) = 1$), то число неустойчивых корней $\omega_n = \omega_n(k)$ ($n = 1, 2, \dots, N$), равное числу нулей ϵ_0 в верхней полуплоскости ω , совпа-

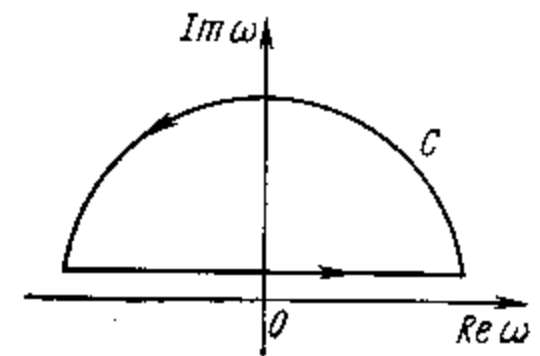


Рис. 2.2. Контур интегрирования в формуле (2.81)

равное числу нулей ϵ_0 в верхней полуплоскости ω , совпа-

дает с числом полюсов функции $1/\varepsilon_0$, которое по теореме о вычетах есть

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega \, d\varepsilon/d\omega}{\varepsilon(\omega)} \quad (2.81)$$

(индекс нуль у ε_0 опущен). Направление контура C таково, что при движении по этому контуру верхняя полуплоскость лежит слева (на рис. 2.2 показано стрелками). Переходя в (2.81) от переменной интегрирования ω к переменной ε , можно записать это выражение в виде

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (2.82)$$

где контур D есть отображение контура C на плоскость комплексного ε . Это соотношение принято называть формулой Найквиста. Пример контура D для плазмы с максвелловским распределением по скорости приведен на рис. 2.3.

При переходе от ω к ε бесконечной полукруг рис. 2.2 преобразуется в точку $\varepsilon = 1$ контура D . Все остальные

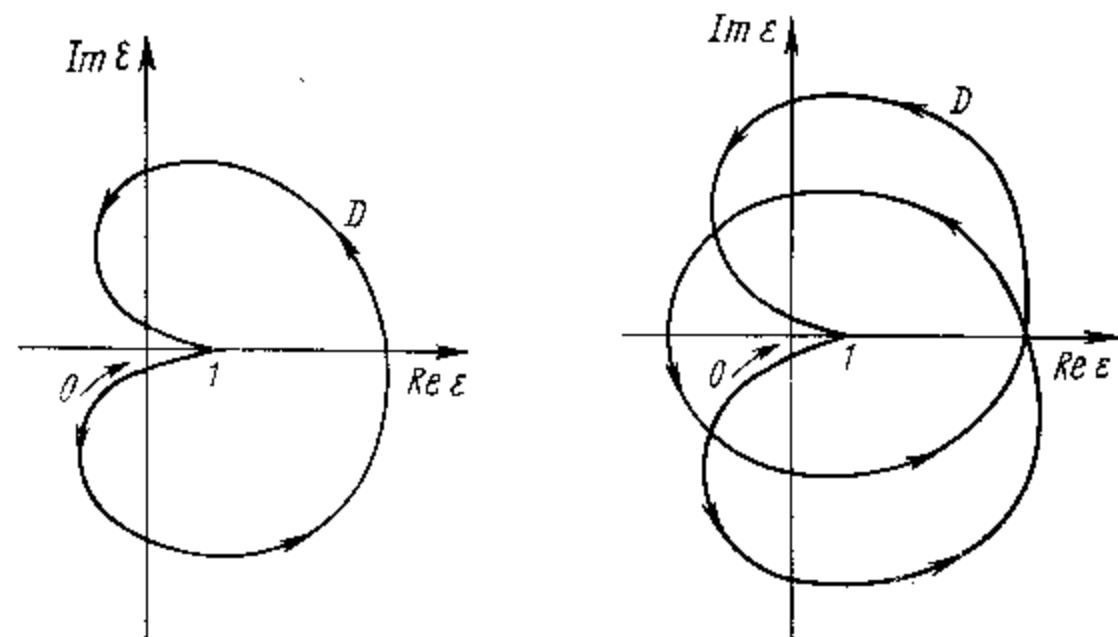


Рис. 2.3. Контур интегрирования в формуле (2.82) в случае максвелловской плазмы

Рис. 2.4. Контур интегрирования в формуле (2.82) в случае неустойчивой плазмы

точки D соответствуют горизонтальной части контура C , на которой ω вещественно. Поэтому для вычерчивания контура D достаточно иметь выражение для ε от вещест-

венного ω . В случае максвелловской плазмы это выражение дается уравнением (2.44).

Изображенный на рис. 2.3 контур D не охватывает точку $\varepsilon_0 = 0$. Поэтому, согласно (2.82), неустойчивые решения в случае максвелловской плазмы отсутствуют, что находится в соответствии с общей теоремой предыдущего параграфа.

Неустойчивости соответствует контур типа, изображенного на рис. 2.4. Чтобы контур D имел такую форму, необходимо на контуре C иметь такое вещественное $\omega = \omega_0$, при котором $\text{Im } \varepsilon(\omega_0) = 0$, $\text{Im } \varepsilon'(\omega_0) < 0$, $\text{Re } \varepsilon(\omega_0) \leq 0$. Именно в этом случае на контуре D есть участок, идущий сверху вниз левее точки $\varepsilon = 0$. Отсюда следует достаточное условие устойчивости: если при всех $\omega = \omega_0$, таких, что:

$$\text{Im } \varepsilon_0(\omega_0) = 0; \quad \text{Im } \varepsilon'(\omega_0) < 0, \quad (2.83)$$

вещественная часть ε положительна:

$$\text{Re } \varepsilon(\omega_0) \geq 0, \quad (2.84)$$

то плазма устойчива.

Используя конкретный вид ε_0 [см. (2.13) — (2.15)], это утверждение можно переформулировать.

Плазма устойчива, если при всех $v = v_0^*$, удовлетворяющих условиям:

$$f'_0(v_0) = 0, \quad f''_0(v_0) > 0, \quad (2.85)$$

имеет место неравенство

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(v) \, dv}{v - v_0} \leq \frac{mk^2}{4\pi e^2}. \quad (2.86)$$

Это условие устойчивости плазмы относительно возмущений с данным k . Плазма устойчива относительно возмущений со всеми k (и в том числе с $k \rightarrow 0$), если

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(v) \, dv}{v - v_0} \leq 0. \quad (2.87)$$

* Здесь v означает проекцию вектора \mathbf{v} на направление \mathbf{k} .

Интегрируя по частям, этот критерий устойчивости можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(v) - f_0(v_0)}{(v - v_0)^2} dv \leq 0. \quad (2.88)$$

Покажем, что условие (2.87) или (2.88) является не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости. Иначе говоря, докажем следующую теорему.

Если хотя бы в одной из точек $v = v_0$, удовлетворяющих условиям (2.85), имеет место неравенство, обратное (2.87), то найдется возмущение с некоторым k , по отношению к которому плазма неустойчива.

Вместо переменной $\varepsilon(\omega, k)$ введем $Z(\omega/k)$, связанную с ε соотношением

$$Z(\omega/k) = (\varepsilon - 1)k^2. \quad (2.89)$$

Согласно (2.89) и (2.13) — (2.15), функция $Z(\xi)$ имеет вид

$$Z(\xi) = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(v) dv}{v - \xi} - i\pi f_0'(\xi). \quad (2.90)$$

Соотношение (2.82) при замене (2.89) преобразуется так:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{dZ}{Z - Z_0}, \quad (2.91)$$

где $Z_0 \equiv -k^2$, а контур G есть отображение C или соответственно D на плоскость Z . Графики контуров, соответствующих рис. 2.2 и 2.3, даны на рис. 2.5 и 2.6.

Сделав преобразование (2.89), мы явно выделили входящий в задачу параметр $k^2 \equiv -Z_0$. Этот параметр может принимать произвольные положительные значения. Поэтому в случае пересечения кривой G и отрицательной полу-

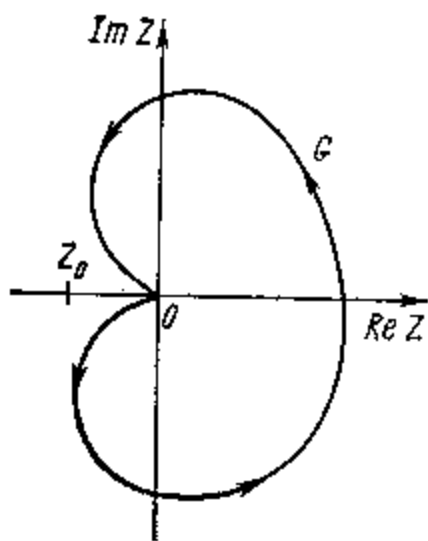


Рис. 2.5. Контур интегрирования в формуле (2.91) в случае максвелловской плазмы

оси Z всегда можно найти такое Z_0 , которое лежит внутри контура G (см. рис. 2.6). Следовательно, условие такого пересечения есть вместе с тем и достаточное условие неустойчивости.

Пересечение G с $\text{Re } Z < 0$ имеет место, если $\text{Re } Z(v_0) \leq 0$, где v_0 — любое из ξ_0 , удовлетворяющее условиям

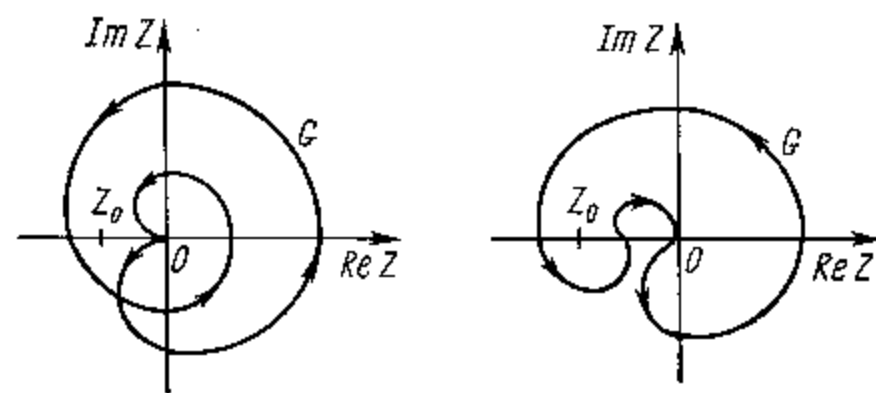


Рис. 2.6. Контур интегрирования в формуле (2.91) в случае неустойчивой плазмы

$\text{Im } Z(v_0) = 0, \text{Im } Z'(v_0) < 0$. Вспоминая, что Z связано с $f_0(v)$ соотношением (2.90), убеждаемся в справедливости сформулированной выше теоремы.

§ 2.8. Некоторые примеры устойчивых и неустойчивых распределений (приближение потенциальных возмущений и $V_0 = 0$)

В критерий устойчивости (2.87) входит одномерная функция распределения, т. е. проинтегрированная по компонентам скорости, поперечным волновому вектору. С помощью этого критерия нетрудно убедиться, что любое одномерное распределение с одним максимумом устойчиво. Это вытекает из того, что в случае распределения с одним максимумом нет ни одной точки $v = v_0$, удовлетворяющей условиям (2.85).

К одномерной функции распределения с одним максимумом (лежащим при $v = 0$) приводит, в частности, любая сферически-симметричная функция распределения

$$f_0(v) = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (2.92)$$

Действительно, интегрируя (2.92), скажем, по v_x, v_y , находим

$$\left. \begin{aligned} f_0(v_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} F(v_{\perp}^2 + v_z^2) v_{\perp} dv_{\perp} = \pi \int_{v_z^2}^{\infty} F(\xi) d\xi; \\ v_{\perp}^2 &= v_x^2 + v_y^2. \end{aligned} \right\} (2.93)$$

Отсюда следует

$$\partial f_0(v_z)/\partial v_z = -\pi v_z F(v_z^2). \quad (2.94)$$

Поскольку функция F неотрицательна, то, согласно (2.94), единственный экстремум функции $f_0(v_z)$ лежит при $v_z = 0$. Этот экстремум соответствует максимуму, так как

$$(\partial^2 f_0(v_z)/\partial v_z^2)_{v_z=0} = -\pi F(0) \leq 0. \quad (2.95)$$

Из сказанного следует, что любое сферически-симметричное распределение (с произвольным числом максимумов и минимумов) является устойчивым. Это расширяет класс устойчивых сферически-симметричных распределений, пайденный в § 2.6. Однако в отличие от § 2.6, где показывалась устойчивость относительно любых типов возмущений и при произвольном магнитном поле \mathbf{B}_0 , в данном случае имеются в виду только потенциальные возмущения и приближение $\mathbf{B}_0 = 0$.

Одномерное распределение с одним максимумом получается и при интегрировании по двум компонентам скорости анизотропной функции распределения, монотонно убывающей с квадратом компонент скорости, т. е. функции вида

$$f_0(v) = F(v_x^2, v_y^2, v_z^2), \quad (2.96)$$

такой, что при всех v_{α}

$$\partial F/\partial v_{\alpha}^2 \leq 0 \quad (\alpha = x, y, z). \quad (2.97)$$

К этому типу функций относится, например, «двумаксвелловское» распределение

$$\begin{aligned} f_0(v) &= n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{1/2} \frac{m}{2\pi T_{\perp}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{mv_z^2}{2T_{\parallel}} - \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2T_{\perp}} \right]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Одномерное распределение, соответствующее (2.98), имеет вид

$$f_0(u) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_{\text{эф}}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mu^2}{2T_{\text{эф}}} \right), \quad (2.99)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\text{эф}} &= T_{\perp} \sin^2 \theta + T_{\parallel} \cos^2 \theta; \\ u &= \mathbf{kv}/|\mathbf{k}|; \theta = \text{arctg}(k_x/k_z); \mathbf{k} = (k_x, 0, k_z). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Таким образом, к классу устойчивых относится анизотропное распределение, монотонно убывающее с квадратом компонент скорости. Следует отметить, что этот вывод справедлив только в принятом здесь приближении потенциальных колебаний ($\mathbf{E} = -\nabla\psi$) ненулевого магнитного поля ($\mathbf{B}_0 \neq 0$). Анизотропное распределение может оказаться неустойчивым по отношению к более сложному типу возмущений, таких, для которых важна непотенциальность электрического поля, либо таких, в которых существенна роль статического магнитного поля.

Рассмотрим теперь функции, обладающие симметрией по каким-либо двум компонентам скорости, например по v_x, v_y , т. е. функции вида

$$f_0(v) = F(v_x^2 + v_y^2, v_z). \quad (2.101)$$

В случае возмущений с волновым вектором, лежащим в плоскости симметрии ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}$), играет роль только двумерная функция распределения

$$F_{\perp}(v_{\perp}^2) = \int F(v_x^2 + v_y^2, v_z) dv_z. \quad (2.102)$$

По отношению к таким возмущениям двумерное распределение с одним максимумом устойчиво, даже если этот максимум лежит при $v_{\perp}^2 \neq 0$. Это утверждение зара-

нее не очевидно, поскольку двумерной функции с одним максимумом может соответствовать одномерная функция

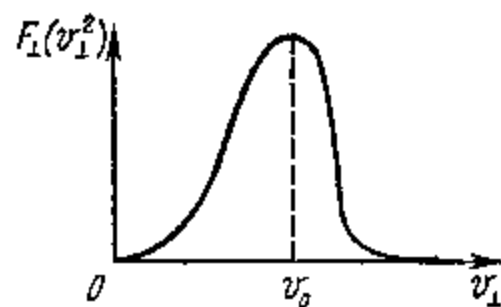


Рис. 2.7. Двумерное распределение с одним максимумом

распределения с минимумом (рис. 2.7 и 2.8). Например, функции

$$F_{\perp}(v_{\perp}^2) = n_0 \frac{\delta(v^2 - v_0^2)}{\pi} \quad (2.103)$$

соответствует одномерная функция

$$f_0(v_x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{v_0^2 - v_x^2}}, & v_x < v_0; \\ 0, & v_x > v_0, \end{cases} \quad (2.104)$$

обладающая минимумом при $v_x = 0$.

Прежде чем оправдать это утверждение, покажем предварительно, что одномерная функция, соответствующая двумерной с одним максимумом, не может обладать минимумом ни в какой другой точке, кроме $v_x = 0$.

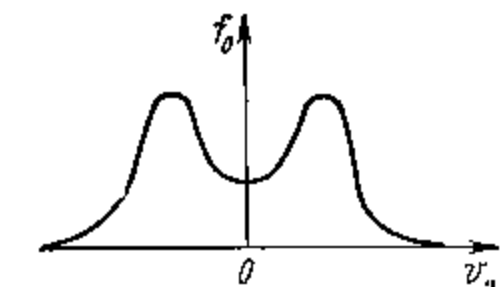


Рис. 2.8. Одномерная функция распределения, соответствующая двумерному распределению с одним максимумом

Подсчитаем число экстремумов одномерной функции, т. е. число точек, в которых

$$\frac{\partial f_0(v_x)}{\partial v_x} = 0, \quad (2.105)$$

предполагая при этом, что $F(v_{\perp}^2)$ обращается в максимум только в одной точке $v_{\perp} = 0$, т. е. что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}^2} > 0 & \text{ при } v_{\perp} < v_0; \\ \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}^2} = 0 & \text{ при } v_{\perp} = v_0; \\ \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}^2} < 0 & \text{ при } v_{\perp} > v_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Так как

$$f_0(v_x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(v_{\perp}^2) dv_y, \quad (2.107)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(v_{\perp}^2)}{\partial v_x} dv_y = 2v_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(v_{\perp}^2)}{dv_{\perp}^2} dv_y = \\ &= 2v_x \int_{v_x^2}^{\infty} \frac{dF(v_{\perp}^2)}{dv_{\perp}^2} \frac{dv_{\perp}^2}{\sqrt{v_{\perp}^2 - v_x^2}}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Отсюда следует, что один из экстремумов достигается при $v_x = 0$. Все другие удовлетворяют условию

$$\int_{v_x^2}^{\infty} \frac{dF(v_{\perp}^2)}{dv_{\perp}^2} \cdot \frac{dv_{\perp}^2}{\sqrt{v_{\perp}^2 - v_x^2}} = 0. \quad (2.109)$$

Видно, что это равенство может удовлетворяться только при $|v_x| < v_0$, так как в противном случае, согласно (2.106), подынтегральное выражение всюду отрицательно. Поэтому (2.109) можно представить в виде

$$\int_{v_x^2}^{v_0^2} \frac{dF(v_{\perp}^2)}{dv_{\perp}^2} \frac{dv_{\perp}^2}{\sqrt{v_{\perp}^2 - v_x^2}} - \int_{v_0^2}^{\infty} \left| \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right| \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - v_x^2}} = 0. \quad (2.110)$$

Каждый из этих интегралов является монотонной функцией $|v_x|$, следовательно, их разность может обратиться в нуль только в какой-нибудь одной точке v_x . Эта точка может соответствовать только максимуму $f_0(v_x)$, поскольку в противном случае нельзя удовлетворить условию $\lim_{v \rightarrow \infty} f_0(v_x) = 0$. Если такой максимум существует, то $v_x = 0$ соответствует минимуму $f_0(v_x)$ (см. рис. 2.7 и 2.8, где приведено двумерное распределение с максимумом при $v_{\perp} = 0$ и соответствующее ему одномерное распределение).

Для функции, минимальной при $v_x = 0$, критерий устойчивости (2.87) записывается в виде

$$\mathcal{P} \int \frac{f_0'(v_x) dv_x}{v_x} \leq 0. \quad (2.111)$$

Подставляя в левую часть выражение (2.107) и переходя от переменных интегрирования v_x, v_y к v_{\perp} и $\alpha =$

$= \arctg(v_y/v_x)$, находим

$$\oint \frac{f_0(v_x) dv_x}{v_x} = -\pi F(0) \leq 0. \quad (2.112)$$

Это завершает доказательство сформулированного выше утверждения об устойчивости двумерного распределения с одним максимумом.

Библиографический обзор к гл. 2

1. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases.—«Phys. Rev.», 1929, v. 33, p. 195.
Получено дисперсионное уравнение низкочастотных колебаний плазмы [уравнение (2.60)] при $T_i = 0$.
2. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1938, т. 8, с. 291.
Здесь было развито кинетическое описание колебаний плазмы. Получено выражение для тепловой поправки к частоте ленгмюровских колебаний [формула (2.51)].
3. Ландау Л. Д. Колебания электроной плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1946, т. 16 с. 574.
Кинетическое уравнение было решено методом Лапласа (§ 2.1). Найдено бесстолкновительное затухание ленгмюровских колебаний [формула (2.53)].
4. Bohm D., Gross E. P. Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behaviour.—«Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1851.
Указан метод получения кинетического дисперсионного уравнения суммированием по бесконечному числу потоков (задача § 2.1).
5. Bohm D., Gross E. P. Theory of plasma oscillations. B. Excitation and damping of oscillations.—«Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1864.
Обсуждается физический смысл бесстолкновительной диссипации (задача § 2.2). Показано, что при наличии дополнительного пика на функции распределения возможно развитие кинетической неустойчивости (§ 2.7). Получена формула (2.17) для конкретного случая ленгмюровских колебаний холодной плазмы и пучка малой плотности с большим тепловым разбросом.
6. Ахнезер А. И., Файнберг Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1951, т. 21, с. 1262.
Обсуждаются кинетические и гидродинамические эффекты, обусловленные конечностью температуры плазмы, в задаче о взаимодействии пучка малой плотности с плазмой. Установлена возможность развития кинетической неустойчивости за счет резонансных частиц плазмы.
7. Герцельштейн М. Е. Самовозбуждение колебаний в положительном столбе газового разряда.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1952, т. 23, с. 669.

- Для исследования кинетических неустойчивостей используется диаграммный метод, изложенный в § 2.7. Показано, что для раскачки колебаний необходимо, чтобы взятая с соответствующим весом сумма электронной и ионной функций распределения имела по крайней мере два максимума (§ 2.7). Получен критерий устойчивости (2.87). Для среды с малой диссипацией получена формула (2.17) с $\text{Im} \epsilon$ вида (2.15).
8. Гордеев Г. В. Низкочастотные колебания плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1954, т. 27, с. 19.
Методом кинетического уравнения исследуются низкочастотные колебания максвелловской плазмы (§ 2.5). Пойдено затухание этих колебаний [формулы (2.68) и (2.69)].
 9. Penrose O. Electrostatic instabilities in a uniform non-Maxwellian plasma.—«Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 258.
 10. Noerdlinger P. D. Stability of uniform plasmas with respect to longitudinal oscillations.—«Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 879.
 11. Ахнезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об условиях устойчивости функции распределения электронов в плазме.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 963.
 12. Ozawa Y., Kaji I., Kito M. Instability criterium for plasma oscillations in a magnetic field.—«Nucl. Fusion, Suppl.», 1962, v. 3, p. 1123.
В работах [9—12] методом, сходным с методом работы [7], рассматриваются общие критерии устойчивости плазмы относительно потенциальных возмущений. Результаты этих работ использованы в § 2.7.
 13. Гинзбург В. Л. Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде.—«Успехи физ. наук», 1959, т. 69, с. 537.
 14. Коврижных Л. М., Рухадзе А. А. О неустойчивости продольных колебаний электронно-ионной плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 38, с. 850.
В работах [13, 14] показана устойчивость сферически-симметричного распределения частиц по скоростям (§ 2.8).
 15. Bernstein I. B., Trehan S. K., Weenink M. P. H. Plasma oscillations. II. Kinetic theory of waves in plasmas.—«Nucl. Fusion», 1964, v. 4, p. 61.
Изложена общая теорема об устойчивости плазмы (§ 2.6).
 16. Rosenbluth M. N., Post R. F. High-frequency electrostatic plasma instability inherent to «loss-cone» particle distributions.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 547.
Обсуждается устойчивость двумерного распределения (§ 2.8).
 17. Фаддеева В. П., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.
Табулирована функция $W(x)$ [формула (2.45)].
 18. Fried B. D., Conte S. D. The plasma dispersion function. N.Y., Academic Press, Inc., 1961.
Табулирована функция $Z(x)$ [формула (2.46)].
 19. Sturrock P. A. In what sense do slow waves carry negative energy? —«J. Appl. Phys.», 1960, v. 31, p. 2056.
 20. Pierce J. R. Momentum and energy of waves.—«J. Appl. Phys.», 1961, v. 32, p. 2580.

21. Briggs R. J. Transformation of small signal energy and momentum of waves.—*J. Appl. Phys.*, 1964, v. 35, p. 3268.
22. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах.—*Журн. эксперим. и теор. физ.*, 1964, т. 47, с. 2266.
23. Bers A., Gruber S. Negative-energy plasma waves and instabilities of cyclotron harmonics.—*Appl. Phys. Lett.*, 1965, v. 6, p. 27.
24. Hall L. S., Peckrotte W. Interaction models, negative energy waves and electrostatic instabilities.—*Phys. Fluids*, 1966, v. 9, p. 1496.
25. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рюттов Д. Д. О взаимодействии волн с отрицательной энергией в слаботурбулентной плазме.—*Журн. эксперим. и теор. физ.*, 1965, т. 48, с. 913. В работах [19—25] обсуждается вопрос об энергии колебаний (§ 2.3).

ГЛАВА 3

КИНЕТИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 3.1. Влияние теплового движения частиц на гидродинамическую пучковую неустойчивость

В гл. 1 при решении кинетического уравнения (I) пренебрегались тепловым движением частиц. Функция распределения каждой группы частиц принималась равной сумме нескольких δ -функций [см. уравнение (1.1)]. В результате кинетическое уравнение можно было свести к двум уравнениям (1.2) и (1.3) для плотности и скорости потока, а дисперсионное уравнение — к довольно простому виду (1.35) с $\epsilon_0^{(\alpha)}$ вида (1.36'). Рассмотрим теперь пределы применимости этих соотношений.

Будем следовать кинетическому описанию плазмы, положив, что ее равновесная функция распределения имеет вид

$$f_0 = \sum_{\alpha} f_0^{(\alpha)}, \quad (3.1)$$

где

$$f_0^{(\alpha)} = n_0^{(\alpha)} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{V}^{(\alpha)})^2}{2T_{\alpha}} \right]. \quad (3.2)$$

При $T_{\alpha} \rightarrow 0$ выражение (3.2) переходит в $n_0^{(\alpha)} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}^{(\alpha)})$ и соответствует приближению холодной плазмы,

Подставляя (3.1) и (3.2) в выражение для диэлектрической проницаемости (2.10) и приравнявая результат нулю, получаем по аналогии с (2.44)

$$\epsilon_0 = 1 + \sum_{\alpha} \frac{1}{k^2 d_{\alpha}^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega - kV^{(\alpha)}}{|k| v_T^{(\alpha)}} W \left(\frac{\omega - kV^{(\alpha)}}{|k| v_T^{(\alpha)}} \right) \right] = 0, \quad (3.3)$$

где $d_{\alpha}^2 = T_{\alpha}/4\pi e^2 n_0^{(\alpha)}$; $v_T^{(\alpha)} = (2T_{\alpha}/m_{\alpha})^{1/2}$. Предполагаем здесь для простоты $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}$.

Как отмечалось в § 2.4, приближению холодной плазмы соответствует случай больших аргументов W -функции. Поэтому общий критерий применимости приближения холодной плазмы в задаче о гидродинамической пучковой неустойчивости имеет вид

$$|\omega - kV^{(\alpha)}| \gg kv_T^{(\alpha)}. \quad (3.4)$$

В случае двух электронных потоков равной плотности (см. и. 1 § 1.5), когда $\gamma \simeq kV$, условие (3.4) приводит к требованию, чтобы скорость относительного движения потоков значительно превышала тепловую скорость каждого из потоков:

$$V \gg (v_T^{(1)}, v_T^{(2)}). \quad (3.5)$$

Если плотность одного из электронных потоков мала, $n_1/n_0 \ll 1$, то ограничение на тепловой разброс более плотной компоненты получается таким же, как и (3.5), а для менее плотной компоненты это ограничение оказывается более жестким:

$$(n_1/n_0)^{1/3} V \gg v_{T1}. \quad (3.6)$$

В задаче об устойчивости относительно движения электронов и ионов, в которой отношение эффективных плотностей равно m_e/m_i , ограничение на тепловой разброс ионов имеет вид

$$v_{Ti} \ll (m_e/m_i)^{1/3} V. \quad (3.7)$$

Соотношения (3.6) и (3.7) относятся к случаю резонансной неустойчивости, когда $\gamma \simeq (n_1/n_0)^{1/3} \text{Re } \omega$ либо $\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/3} \text{Re } \omega$ (см. § 1.5 и 1.6). Неустойчивость

сносовых колебаний, инкремент которой пропорционален корню квадратному из отношения плотностей, описывается гидродинамическими уравнениями лишь при меньшем тепловом разбросе менее плотной компоненты, а именно при

$$v_{T1} \ll (n_1/n_0)^{1/2} V; \quad (3.8)$$

$$v_{Ti} \ll (m_e/m_i)^{1/2} V. \quad (3.9)$$

Чтобы получить критерии более точные, чем сильные неравенства (3.4) — (3.9), нужно рассмотреть уравнение (3.3) при больших, но конечных аргументах W -функций. Тогда с точностью до членов порядка v_T^2 включительно из него следует

$$1 - \sum \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kV^{(\alpha)})^2} \left(1 + \frac{3kT_\alpha}{m_\alpha (\omega - kV^{(\alpha)})^2} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Отсюда можно найти, что максимальный инкремент колебаний, возбуждаемых «слегка нагретым» пучком малой плотности в «слегка нагретой» плотной плазме, равен

$$\gamma_{\max} = \frac{V^3}{2} \omega_{p0} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1/3} \left[1 - \frac{T_0}{2mV^2} - \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{2/3} \frac{T_1}{mV^2} \right]. \quad (3.11)$$

Видно, что приближение холодного пучка и плазмы дает правильные по порядку величины результаты даже в том случае, если неравенства (3.4) — (3.9) не являются сильными.

Критерии (3.4) — (3.9) имеют наглядный смысл. Они означают, что среднее тепловое смещение частиц за период колебаний (либо за время обратного инкремента), измеренный в сопутствующей направленной движению этих частиц системе координат, не должно превышать длину волны колебаний.

§ 3.2. Неустойчивость пучка с большим тепловым разбросом в плотной холодной плазме

Рассмотренная в § 1.5 гидродинамическая пучковая неустойчивость не развивается, если тепловой разброс пучка достаточно велик, такой, что выполняется

неравенство, обратное (3.6):

$$v_{T1}/V > (n_1/n_0)^{1/3}. \quad (3.12)$$

В этих условиях в плазме может развиваться кинетическая неустойчивость, обязанная эффекту бесстолкновительной диссипации (см. § 2.2 и 2.3).

Возможность развития такой неустойчивости вытекает из общего рассмотрения неустойчивости плазмы, проведенного в § 2.7. В этом параграфе было показано, что распределение по скоростям неустойчиво, если между двумя максимумами на функции распределения имеется достаточно глубокий минимум. В интересующем нас здесь случае функция распределения системы холодная плазма — горячий пучок представлена на рис. 3.1. Видно, что это распределение удовлетворяет отмеченному выше критерию неустойчивости.

Исследование кинетической неустойчивости проведем, основываясь на уравнениях (2.10), (2.16) и (2.17). Подставляя в них функцию распределения вида

$$f_0 = f_{00} + f_{01} = n_0 \delta(v) + n_1 \left(\frac{m}{2\pi T_1} \right)^{3/2} \times \exp \left[-\frac{m(v-V)^2}{2T_1} \right], \quad (3.13)$$

находим частоту и инкремент колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &\approx \omega_{pe}; \\ \gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{kV}{\omega_{pe}} - 1 \right) \frac{\omega_{pe}^2}{|k|^3 d_1^2 v_{T1}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(\omega_{pe} - kV)^2}{(kv_{T1})^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

здесь $d_1^3 = T_1/4\pi e^2 n_1$, $n_1 \ll n_0$.

Если тепловой разброс пучка мал по сравнению с направленной скоростью, $v_{T1} \ll V$, то максимум γ дости-



Рис. 3.1. Функция распределения системы холодная плазма — горячий пучок

гается при

$$k \approx \omega_{pe}/V. \quad (3.15)$$

По порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{V}{v_{T1}} \right)^2. \quad (3.16)$$

Сравнивая (3.16) с (1.52) и учитывая условие (3.12), приходим к выводу, что инкремент неустойчивости пучка с большим тепловым разбросом меньше инкремента не-

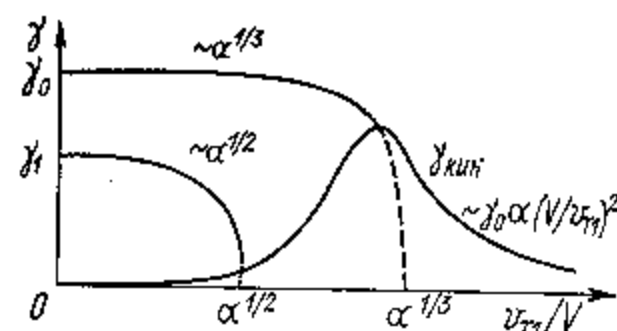


Рис. 3.2. Схематическая зависимость инкрементов от v_{T1} (здесь γ_0 , γ_1 — гидродинамические резонансный и нерезонансный инкременты, $\gamma_{кин}$ — кинетический инкремент)

устойчивости холодного пучка. Экстраполируя эти выражения на область промежуточных значений теплового разброса пучка

$$v_{T1} \approx \alpha^{1/3} V, \quad (3.17)$$

находим, что в этой области они по порядку величины совпадают друг с другом. Это означает, что гидродинамическая неустойчивость относительно пучка плавно переходит в кинетическую при увеличении

параметра $v_{T1}/\alpha^{1/3} V$ до значений порядка единицы и больших. Соответствие между этими типами неустойчивости схематически изображено на рис. 3.2. Здесь же показана вытекающая из оценок § 3.1 зависимость инкрементов перерезонансной гидродинамической неустойчивости [см. также формулу (1.48)] от теплового разброса пучка.

Кинетическая неустойчивость возможна и в случае пучка с малым тепловым разбросом, $v_{T1} < \alpha^{1/3} V$, однако при этом ее инкремент экспоненциально мал (см. рис. 3.2).

§ 3.3. Неустойчивость холодного пучка в плотной горячей плазме

Рассмотрим раскачку колебаний пучком, скорость которого мала по сравнению с тепловой скоростью плазмы:

$$V < v_{T0}. \quad (3.18)$$

Плотность пучка считаем малой по сравнению с плотностью плазмы, $\alpha \equiv n_1/n_0 \ll 1$. Тепловым разбросом пучка пренебрегаем. Считаем, что $\omega \approx k_z V$ ($\mathbf{V} \parallel \mathbf{z}$) и в силу (3.18) $\omega \ll kv_{T0}$. Тогда из (3.3) следует дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{1}{k^2 d_0^2} \left(1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k| v_{T0}} \right) - \frac{\alpha \omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2} = 0. \quad (3.19)$$

Здесь $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$, $d_0^2 = T_0/4\pi e^2/n_0$.

При получении (3.19) были использованы разложения (2.47) и (2.48). Из (3.19) находим

$$\omega_k = k_z V - \frac{\alpha^{1/2} \omega_p}{(1 + 1/k^2 d_0^2)^{1/2}}; \quad (3.20)$$

$$\gamma_k = \left(\frac{\pi \alpha}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + k^2 d_0^2)^{3/2}} \times \\ \times \left\{ k_z V - |k| v_{T0} \left[\frac{\alpha}{2(1 + k^2 d_0^2)} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.21)$$

Инкремент положителен (неустойчивость) при $V > V_{кр}$, где

$$V_{кр} = \frac{v_{T0}}{\cos \theta} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + k^2 d_0^2)^{1/2}}, \quad \cos \theta = k_z/k. \quad (3.22)$$

При $kd_0 \approx 1$ по порядку величины

$$\gamma_k \approx \alpha^{1/2} \omega_p V/v_{T0}; \quad (3.23)$$

$$V_{кр} \approx \alpha^{1/2} v_{T0}. \quad (3.24)$$

Неустойчивость пучка с $\alpha^{1/2} < V/v_{T0} < 1$ обусловлена взаимодействием с колебаниями (3.20) резонансных электронов плазмы и вследствие этого является существенно кинетическим эффектом.

На пределах применимости гидродинамики и кинетики, т. е. при $V \approx v_{T0}$, кинетический инкремент (3.23) мал по сравнению с гидродинамическим резонансным (1.52), но по порядку величины равен гидродинамическому перерезонансному (1.48). Проследить переход от гидродинамики к кинетике можно, оставляя в (3.3) отношение ω/kv_{T0} произвольным:

$$1 + \frac{1}{k^2 d_0^2} \left[1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k| v_{T0}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T0}} \right) \right] - \\ - \frac{\alpha \omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2} = 0. \quad (3.25)$$

Аналогично (1.47) находим ($\cos \theta = 1$)

$$\omega = k_z V \pm \frac{\alpha^{1/2} \omega_p}{\left\{ 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{V}{v_{T0}} W \left(\frac{V}{v_{T0}} \right) \right] \right\}^{1/2}}. \quad (3.26)$$

Если k_z не слишком близко к ω_p/V , то мнимая часть правой части (3.26) определяет $\gamma = \gamma(v_{T0}/V)$ при произвольном значении параметра v_{T0}/V . При $V > v_{T0}$ зависимость $\gamma(v_{T0}/V)$ совпадает с (1.48), а при $V < v_{T0}$ — с (3.23) (рис. 3.3).

Неустойчивость с инкрементом (1.52) возможна только при условии, что знаменатель правой части (3.26) достаточно мал:

$$\left| 1 + 2 \frac{V^2}{v_{T0}^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{V}{v_{T0}} W \left(\frac{V}{v_{T0}} \right) \right] \right| \ll \alpha^{1/2}. \quad (3.27)$$

Это условие удовлетворяется только при $v_{T0}/V < 1$. Таким образом, граница неустойчивости с инкрементом (1.52) лежит при меньших v_{T0}/V , чем граница между гидродинамикой и кинетикой. Это иллюстрируется рис. 3.3.

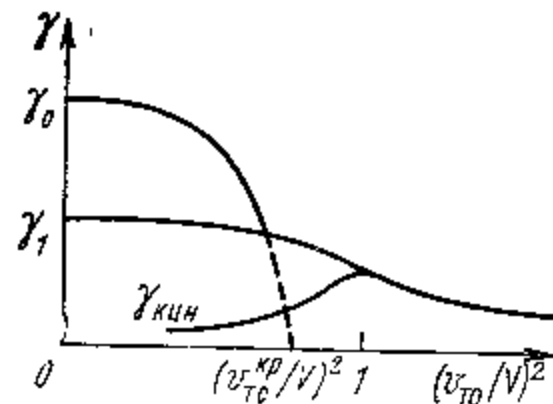


Рис. 3.3. Схематическая зависимость инкрементов гидродинамической и кинетической неустойчивостей от температуры плазмы

Кинетическая неустойчивость возможна и в гидродинамически неустойчивой плазме, $V > v_{T0}$ (ср. с аналогичным эффектом в § 3.2). При очень малом v_{T0}/V ее инкремент экспоненциально мал. На пределах применимости гидродинамики он сравним с гидродинамическим инкрементом (1.48) (см. рис. 3.3).

Уравнение (3.18) и вытекающие из него результаты справедливы, если только $|\omega - kV| \gg kv_{T1}$. Отсюда, с учетом (3.20) и (3.24) находим критерий

$$v_{T1} < (V, \alpha^{1/2} v_{T0}). \quad (3.28)$$

Выше пренебрегалось ролью ионной компоненты плазмы. Это законно, если $\omega \gg \omega_{ион}$, где $\omega_{ион}$ — частота ионно-звуковых и ионных ленгмюровских колебаний,

определенная уравнением (2.60). Отсюда с учетом приближенного равенства $\omega \simeq k_z V$ вытекает условие несущественности ионов

$$V \gg \frac{k}{k_z} \frac{(T_e/m_i)^{1/2}}{(1+k^2 d_e^2)^{1/2}}. \quad (3.29)$$

При $k_z \simeq k$ это условие нарушается только в случае очень медленных пучков. Устойчивость таких пучков будет рассмотрена в § 3.5.

§ 3.4. Неустойчивость плазмы с относительным движением электронов и ионов

В гидродинамическом приближении устойчивость плазмы, электроны которой движутся относительно ионов, рассматривалась в § 1.6. Условия применимости для этой цели гидродинамики обсуждались в § 3.1. Там же выяснено влияние вещественных тепловых поправок на инкремент колебаний.

Теперь учтем кинетические эффекты. Поскольку выражения $\epsilon_0(\omega, k)$ для электроно-ионных и электронных колебаний отличаются только обозначениями, то можно воспользоваться аналогией с § 3.2 и 3.3.

Возможные типы неустойчивостей электроно-ионной плазмы с относительным движением компонент иллюстрируются на рис. 3.4. Они существенно зависят от отношения T_i/T_e . В плазме с $T_e \simeq T_i$ может развиваться только гидродинамическая неустойчивость [см. § 1.6, неустойчивость Бупемана]. Для этого необходимо, чтобы $V \gg v_{Te}$ (см. § 3.1).

В плазме с $T_e \gg T_i$ имеется ветвь ионно-звуковых и ионных ленгмюровских колебаний § 2.5. Относительное движение компонент может приводить к их раскачке. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид, аналогичный (3.19):

$$1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} \left[1 + \frac{i \sqrt{\pi} (\omega - k_z V)}{|k| v_{Te}} \right] - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 T_i}{m_i \omega^2} \right) + \frac{i \sqrt{\pi}}{k^2 d_i^2} \frac{\omega}{|k| v_{Ti}} \exp \left(-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ti}^2} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Из (3.30) следует, что плазма неустойчива, если $V > V_{кр}$, где

$$V_{кр} = \frac{(T_e/m_i)^{1/2}}{(1+k^2d_e^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \right\} \times \exp \left[-\frac{3}{2} - \frac{T_e}{2T_i(1+k^2d_e^2)} \right]. \quad (3.31)$$

Инкремент колебаний порядка

$$\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pi}. \quad (3.32)$$

При не слишком большом T_e/T_i , когда существенно затухание колебаний на резонансных ионах, минимум $V_{кр}$

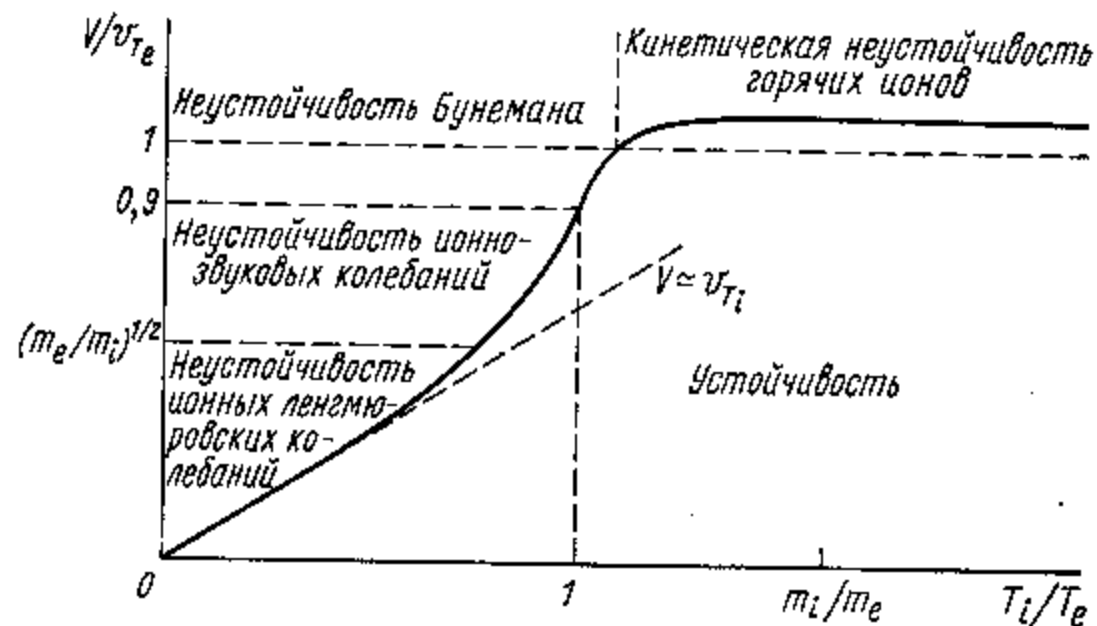


Рис. 3.4. Диаграмма неустойчивости плазмы с относительным движением электронов и ионов

достигается при $(kd_e)^2 < 1$:

$$V_{кр} = \left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \right] \times \exp \left(-\frac{3}{2} - \frac{T_e}{2T_i} \right). \quad (3.33)$$

Возбуждаемые колебания в этом случае имеют частоту (2.65). Если

$$T_e/T_i > \ln \left[\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \frac{m_i}{m_e} \right], \quad (3.34)$$

то минимум $V_{кр}$ приходится на возмущения с $kd_e \gg 1$ т. е. с частотой (2.67). При этом

$$V_{кр.мин} \approx \left(\frac{T_i}{m_i}\right)^{1/2} \ln^{1/2} \left[\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \frac{m_i}{m_e} \right]. \quad (3.35)$$

Численный расчет $V_{кр.мин}$ как функции T_e/T_i для водородной плазмы провел Джексон. Результат представлен на рис. 3.5. При $T_e = T_i$ $V_{кр.мин}$ нашел Бунеман:

$$V_{кр.мин} = 0,9v_{Te}. \quad (3.36)$$

При условиях $V > v_{Te}$ и $T_i/T_e > (m_i/m_e)^{1/2}$ развивается неустойчивость, аналогичная рассмотренной в § 3.2. Ее максимальный инкремент [ср. с (3.16)]

$$\gamma_{макс} \simeq \left(\frac{V}{v_{Ti}}\right)^2 \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe}. \quad (3.37)$$

Эта неустойчивость попадает в правый верхний угол рис. 3.4.

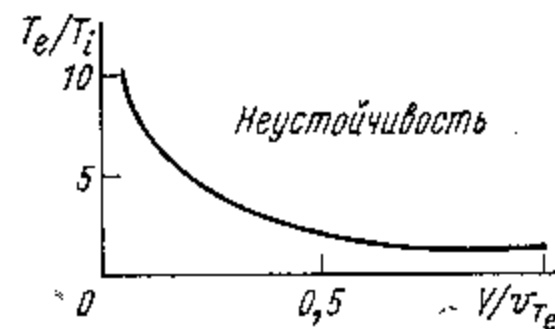


Рис. 3.5. Зависимость критической скорости относительного движения электронов и ионов от T_e/T_i

§ 3.5. Раскачка ионным пучком ионно-электронных колебаний плазмы

В § 3.3 была рассмотрена раскачка колебаний плазмы пучком, скорость которого хотя и мала, но все же ограничена снизу условием (3.29). Такой пучок раскачивает колебания, в которых участвует только электронная компонента плазмы. Теперь рассмотрим неустойчивости более медленного пучка, положив

$$V \ll (T_e/m_i)^{1/2}. \quad (3.38)$$

Как будет показано, столь медленный пучок может раскачивать колебания, в которых существенна роль ионной компоненты.

Ионно-электронные колебания могут раскачиваться как ионным, так и электронным пучком. Для ионного пучка условие $V \ll (T_e/m_i)^{1/2}$ означает, что энергия ионов пучка не должна существенно превышать температуру

электронной компоненты плазмы:

$$W_i \ll T_e. \quad (3.39)$$

В случае электронного пучка условие $V < (T_e/m_i)^{1/2}$ удовлетворяется, если только энергия частиц пучка весьма мала по сравнению со средней энергией электронов плазмы:

$$W_e \ll (m_e/m_i) T_e. \quad (3.40)$$

Это условие существенно ограничивает возможность практического осуществления эксперимента по возбуждению ионных колебаний электронным пучком. Приписывая в качестве нижней оценки энергии электронов пучка величину порядка нескольких электронвольт, находим, что для осуществления такого эксперимента необходимо предварительно нагреть электроны плазмы до температуры в несколько килоэлектронвольт.

Исходя из этого, в последующем изложении основное внимание уделим исследованию устойчивости ионного пучка. Результаты, касающиеся возбуждения ионных колебаний электронным пучком, формально отличаются от соответствующих ионных только обозначениями.

Будем полагать $|\omega - k_z V| \gg kv_{T1}$. Это приближение будет оправдано, если окажется, что $\gamma > kv_{T1}$. Фазовую скорость колебаний будем считать заключенной в пределах

$$v_{T1} \ll \omega/k \ll v_{Te}. \quad (3.41)$$

Малыми тепловыми поправками и мнимыми членами в ϵ_0 , связанными с конечностью параметров kv_{T1}/ω , $kv_{T1}/(\omega - k_z V)$, ω/kv_{Te} , пренебрегаем. При указанных предположениях из (3.3) получаем дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\alpha \omega_{pi}^2}{(\omega - k_z V)^2} = 0, \quad (3.42)$$

$$\alpha = n_1/n_0.$$

Оно отличается от (1.46) переобозначением

$$\omega_{pe}^2 \rightarrow \omega_{pi}^2 (1 + 1/k^2 d_e^2)^{-1}. \quad (3.43)$$

Как и (1.46), уравнение (3.42) имеет комплексное решение с $\gamma > 0$. Максимум инкремента

$$\gamma = (\sqrt{3}/2^{4/3}) \alpha^{1/3} \omega_R \quad (3.44)$$

достигается при ω_R , k_{\perp} , k_z , связанных соотношением

$$\omega_R^2 \approx \omega_{pi}^2 / (1 + 1/k^2 d_e^2) \approx (k_z V)^2. \quad (3.45)$$

Первое равенство (3.45) означает, что пучок раскачивает ветвь ионно-звуковых и ионных ленгмюровских колебаний (см. § 2.5). Такие колебания возможны только в плазме с $T_e \gg T_i$, так как при $T_i \approx T_e$ не удовлетворяется левое неравенство (3.41).

Из второго равенства (3.45) получаем уравнение для резонансного волнового числа k_z :

$$k_z^4 - k_z^2 \frac{1}{d_e^2} \left[\frac{T_e}{m_i V^2} - (1 + k_{\perp}^2 d_e^2) \right] - k_{\perp}^2 \frac{\omega_{pi}^2}{V^2} = 0. \quad (3.46)$$

Видно, что колебания с $k_{\perp} < k_z$ могут возбуждаться только при условии

$$V < (T_e/m_i)^{1/2}. \quad (3.47)$$

В этом случае из (3.46) следует:

$$k_z = \frac{\omega_{pi}}{V} \left(1 - \frac{m_i V^2}{T_e} \right)^{1/2}. \quad (3.48)$$

Более быстрый пучок возбуждает только косые возмущения $k_{\perp} \gg k_z$. В пределе $V \gg (T_e/m_i)^{1/2}$ из (3.46) находим

$$k_z^2 = k_{\perp}^2 \frac{T_e}{m_i V^2} \cdot \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 d_e^2}. \quad (3.49)$$

Если температура ионов плазмы T_i достаточно мала, то как при малых, так и при больших $V (m_i/T_e)^{1/2}$, полное волновое число $k = (k_{\perp}^2 + k_z^2)^{1/2}$ может быть большим по сравнению с $1/d_e$. Таким k соответствует максимальное $\omega_R = \omega_{pi}$ и в соответствии с (3.44) максимальный инкремент

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \alpha^{1/3} \omega_{pi}. \quad (3.50)$$

Обсудим пределы применимости полученных выше результатов. Согласно (3.50), предположение $\gamma > kv_{T1}$ оправдывается при достаточно малом тепловом разбросе пучка [ср. с (3.6)]:

$$v_{T1}/V < \alpha^{1/3} \cos \theta; \quad \theta = \arctg(k_{\perp}/k_z). \quad (3.51)$$

При невыполнении этого неравенства может развиваться кинетическая неустойчивость, аналогичная рассмотренной в § 3.2.

При $V \gg (T_e/m_i)^{1/2}$ в (3.51) следует считать $\cos \theta \simeq (T_e/m_i V^2)^{1/2}$. В этом случае (3.51) означает

$$\frac{v_{T1}}{v_{Te}} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \alpha^{1/3}. \quad (3.52)$$

Это более жесткое условие на тепловой разброс пучка, чем при $V \leq (T_e/m_i)^{1/2}$, когда $\cos \theta \simeq 1$.

Если распределение частиц пучка по «тепловым» скоростям анизотропно, $T_{\perp 1} \neq T_{\parallel 1}$, то в (3.51) вместо v_{T1} следует подставлять $v_{T1}^{\text{эф}}$, где $v_{T1}^{\text{эф}} = (2T_T^{\text{эф}}/m_i)^{1/2}$, а $T_T^{\text{эф}}$ определено соотношением (2.100). При $\cos \theta \approx 1$ $v_{T1}^{\text{эф}} \approx v_{T\perp 1}$, а при $\cos \theta \ll 1$ $v_{T1}^{\text{эф}} \approx v_{T\parallel 1}$.

Из соотношений $\omega \gg kv_{Ti}$, $\omega \simeq k_z V$ следует

$$V \gg v_{Ti}. \quad (3.53)$$

В соответствии с § 3.3 пучок может быть неустойчив и при $Y \leq v_{Ti}$.

Взаимодействие колебаний с резонансными электронами не важно, если инкремент (3.50) велик по сравнению с электронным декрементом (2.68) и (2.69). При $kd_e \simeq 1$ электронный декремент порядка $|\gamma_{эл}| \simeq (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pi}$. Учитывая (3.50), находим, что условие $\gamma > |\gamma_{эл}|$ означает

$$\alpha > (m_e/m_i)^{3/2}. \quad (3.54)$$

Неустойчивость возможна и при $\alpha \leq (m_e/m_i)^{3/2}$, но с меньшим инкрементом.

Библиографический обзор к гл. 3

1. Bohm D., Gross E. P. Theory of plasma oscillations. V. Excitation and damping of oscillations. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1864. Указана кинетическая неустойчивость пучка с большим тепловым разбросом (§ 3.2).
2. Ахизер А. И., Файнберг Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1951, т. 21, с. 1262. Указана и подробно исследована кинетическая неустойчивость пучка в плазме с большим тепловым разбросом (§ 3.3).

3. Герценштейн М. Е. Самовозбуждение колебаний в положительном столбе газового разряда. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1952, т. 23, с. 669. Показана возможность возбуждения низкочастотных возмущений при относительном движении электронов и ионов (§ 3.4).
4. Гордеев Г. В. Возбуждение колебаний плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1954, т. 27, с. 24. Рассмотрено возбуждение низкочастотных возмущений пучком частиц (§ 3.5).
5. Гордеев Г. В. Низкочастотные колебания плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1954, т. 27, с. 19. Найден кинетический инкремент ионно-звуковой неустойчивости [формула (3.32)].
6. Buneman O. Dissipation of currents in ionized media. — «Phys. Rev.», 1959, v. 115, p. 603. Найден критерий неустойчивости относительного движения электронов и ионов в изотермической плазме [формула (3.35)].
7. Auer R. L. Vlasov instability in longitudinal plasma oscillations. — «Phys. Rev. Lett.», 1958, v. 1, p. 411.
8. Bernstein I. B. e.a. Ion wave instabilities. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 136.
9. Jackson E. A. Drift instabilities in Maxwellian plasma. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 786.
10. Bernstein I. B., Kulsrud R. M. Stability of a current-carrying plasma. — «Phys. Fluids», 1961, v. 4, p. 1037.
11. Bernstein I. B., Kulsrud R. M. Effect of charge exchange on the critical current for the onset of ion-wave instabilities. — «Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 210. В работах [7—11] подробно анализируются условия возникновения ионно-звуковой неустойчивости (§ 3.4).
12. Kellogg P. J., Liemohn P. Instability of contrastreaming plasmas. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 40. Произведен численный анализ неустойчивости относительного движения пучков с ненулевой температурой.
13. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы. — «Успехи физ. наук», 1961, т. 73, с. 701. Рассматривается неустойчивость двух ионных потоков сравнимой плотности в плазме с горячими электронами.
14. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Анализ неустойчивости пучка заряженных частиц в электронной плазме. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 640. Анализируются эффекты, лежащие на границе применимости гидродинамического и кинетического описаний пучка (§ 3.1 и § 3.2).
15. Рухадзе А. А. Электромагнитные волны в системе взаимопроницающих плазм. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 1236. Обсуждаются неустойчивости пучка в плазме с учетом температурных (§ 3.2—3.4) и релятивистских эффектов.

ГЛАВА 4
ПРОСТРАНСТВЕННО-ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ
ВОЗМУЩЕНИЯ В НЕУСТОЙЧИВОЙ ПЛАЗМЕ
И УСИЛЕНИЕ ВОЛН

§ 4.1. Предварительные замечания

Обсуждавшиеся выше возмущения типа плоских волн в действительности представляют собой идеализацию пространственно-локализованных возмущений. Более реальным описанием последних является представление их в виде некоторого набора плоских волн. Такой подход принят в настоящей главе.

Оказывается, что свойства пространственно-локализованных возмущений не во всем тождественны свойствам отдельной плоской волны. В частности, поле пространственно-локализованных возмущений в заданной точке пространства может убывать во времени, несмотря на то что амплитуды составляющих это возмущение плоских волн растут во времени. Имст ли место такая возможность или обратная — это определяется свойствами дисперсионного уравнения, описывающего неустойчивость.

Колебания плазмы могут возбуждаться существующими в плазме флуктуациями либо внешними факторами. Последнее используется в прикладных целях: для генерирования или усиления волн. При теоретическом анализе этих вопросов необходимо рассматривать возмущения, возбуждаемые не мгновенно, а в течение некоторого интервала времени.

Если начальное значение возмущенной функции распределения $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ представляет собой плоскую волну, то потенциал возмущения имст вид (2.8). В общем случае функцию $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int g_k(\mathbf{v}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (4.1)$$

Поэтому потенциал возмущения, соответствующий произвольному начальному $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, сводится к интегралу по \mathbf{k} от правой части (2.8):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \frac{h(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]}{\varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (4.2)$$

Здесь введено обозначение

$$h(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi e}{k^2} \int \frac{g_k(\mathbf{v})^* d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (4.3)$$

Предполагая, что дисперсионное уравнение $\varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega) = 0$ не имеет кратных корней, т. е. что все $\omega_n = \omega_n(\mathbf{k})$ различны, представим функцию $\varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega)$ вблизи $\omega = \omega_n(\mathbf{k})$ в виде ряда

$$\varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega) = (\omega - \omega_n(\mathbf{k})) \left(\frac{\partial \varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_n(\mathbf{k})} + \dots \quad (4.4)$$

Используя (4.4), вычисляем в (4.2) интеграл по ω , после чего это выражение принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_n(\mathbf{k})t) \frac{h(\mathbf{k}, \omega_n(\mathbf{k}))}{(\partial \varepsilon_0 / \partial \omega)_{\omega=\omega_n(\mathbf{k})}}. \quad (4.5)$$

Здесь суммирование производится по набору корней дисперсионного уравнения.

Из (4.5) видно, что поведение возмущения определяется не только свойствами функций $\omega_n = \omega_n(\mathbf{k})$, но и первоначальной формой возмущения, т. е. видом $g(\mathbf{r})$. По заданному $g(\mathbf{r})$ функция g_k находится с помощью соотношения

$$g_k(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.6)$$

Плоской волне с волновым вектором \mathbf{k}_0 [$g(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$] соответствует фурье-компонента $g_k \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Функции, локализованной в области размером порядка Δr , соответствует суперпозиция плоских волн, волновые числа которых отличны от нуля на интервале Δk , таком, что

$$\Delta r \Delta k \simeq 1. \quad (4.7)$$

Среднее волновое число k_0 на этом интервале может быть порядка Δk и больше. Первая возможность означает, что масштаб пространственного изменения функции $g(\mathbf{r})$ совпадает с размером области локализации. Примером такой функции является гауссова:

$$g(\mathbf{r}) \sim \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 / 2a^2]. \quad (4.8)$$

Ее фурье-компонента имеет вид

$$g_k \sim \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{2} - i\mathbf{k}\mathbf{r}_0\right). \quad (4.9)$$

Случай $k_0 \gg \Delta k$ соответствует функции $g(\mathbf{r})$, изменяющейся па расстоянии, малом по сравнению с Δr . К числу таких функций относится, в частности, следующая:

$$g(\mathbf{r}) \sim \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2/2a^2 + ik_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)], \quad (4.10)$$

где $k_0 a \gg 1$. Функция g_k в этом случае имеет вид

$$g_k \sim \exp[-(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 a^2/2 - ik_0 \mathbf{r}_0]. \quad (4.11)$$

При $\mathbf{r}_0 = 0$ зависимости (4.8) — (4.11) для случая одномерных функций приведены на рис. 4.1 (для плавного

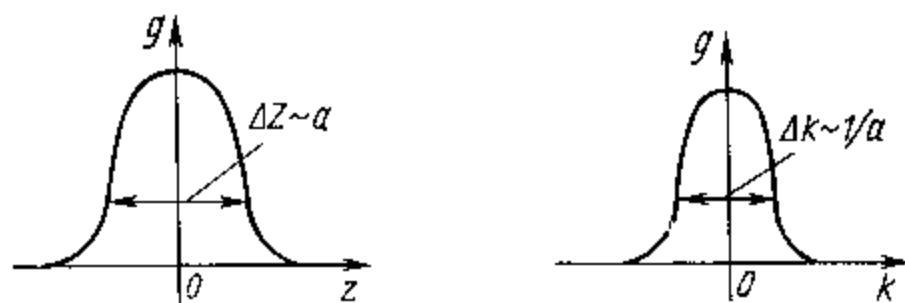


Рис. 4.1. Форма функций $g(z)$ и $g(k)$ в случае плавного пространственно-локализованного распределения

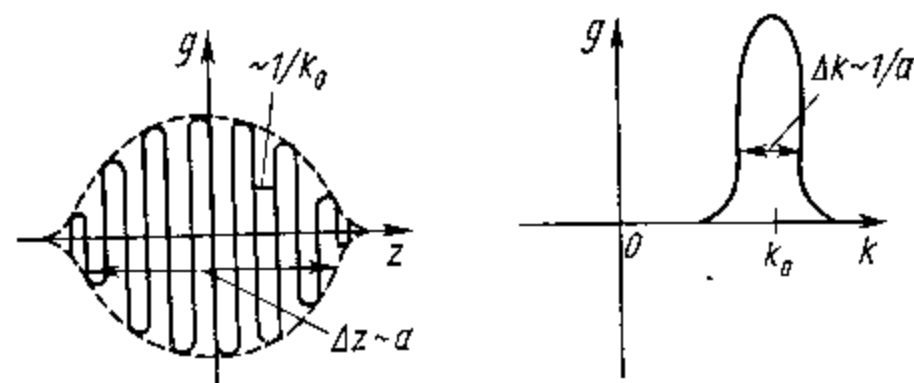


Рис. 4.2. Форма функций $g(z)$ и $g(k)$ в случае волнового пакета

пространственно-локализованного возмущения) и рис. 4.2 (для пространственно-локализованных возмущений с большим числом осцилляций).

В § 4.2 и 4.3 будем исследовать поведение возмущений типа (4.8), а в § 4.4 — типа (4.10). В § 4.5 рассмотрим

возмущения, возбуждаемые пространственно-локализованными сторонними источниками типа (4.8). Всюду в этой главе будем предполагать, что возмущения одномерны.

§ 4.2. Возмущение с широким набором волновых чисел в неустойчивой плазме

Предполагаем, что плазма неустойчива. Пусть инкремент максимален при $k = k^*$, $\gamma(k^*) = \gamma_{\max}$. Если начальное возмущение $h(k)$ — довольно плавная функция k , существенно отличная от нуля при $k = k^*$, то спустя большое время, $t > 1/\gamma^*$, наибольшей амплитудой будет обладать фурье-гармоника с $k \approx k^*$. В окрестности $k = k^*$ функция

$$\omega(k) \approx \omega^* + i\gamma_{\max} + V^*(k - k^*) - \frac{\beta^{-1} i \alpha}{2} (k - k^*)^2. \quad (4.12)$$

Здесь

$$\omega^* = \text{Re } \omega(k^*); \quad V^* = (\partial \omega / \partial k)_{k=k^*};$$

$$\alpha = -(\partial^2 \gamma / \partial k^2)_{k=k^*}; \quad \beta = -(\partial^2 \text{Re } \omega / \partial k^2)_{k=k^*}.$$

Полагая $h(k) = \bar{h}(k) \exp(-ikz_0)$, где $\bar{h}(k)$ — плавная функция [ср. с (4.8)], и учитывая (4.12), приводим (4.5) к виду

$$\begin{aligned} \psi(z, t) \approx & \frac{\bar{h}(k^*) \exp[i(k^* z' - \omega^* t) - \gamma_{\max} t]}{(\partial \epsilon_0 / \partial \omega)_{\omega=\omega(k^*), k=k^*}} \exp\left[-\frac{(z' - V^* t)^2}{2t(\alpha - i\beta)}\right] \times \\ & \times \int dk \exp\left\{-\frac{\alpha - i\beta}{2} t \left[k - k^* - \frac{i(z' - V^* t)}{t(\alpha - i\beta)}\right]^2\right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$t\gamma_{\max} > 1,$
 $z' = z - z_0.$

Интервал волновых чисел, интегрирование по которым дает заметный вклад в (4.13), порядка

$$\Delta k \sim \min \left\{ \left(\frac{1}{\alpha t}\right)^{1/2}, \left(\frac{1}{\beta t}\right)^{1/2} \right\}. \quad (4.14)$$

На этом интервале функцию $\bar{h}(k)$ можно считать константой, если размер локализации начального возмущения достаточно мал:

$$a^2 < t \max(\alpha, \beta). \quad (4.15)$$

Подынтегральное выражение в (4.13) достигает максимума при k , несколько отличном от k^* . Этим отличием можно пренебречь, если $|z - V^*t|$ достаточно мало:

$$|z - V^*t| \ll \sqrt{t} |\alpha - i\beta|^{1/2}. \quad (4.16)$$

В противном случае при отыскании максимума амплитуды потенциала функцию $\omega(k)$ надо было бы разлагать в ряд при $k \neq k^*$.

Можно, однако, рассматривать формулу (4.13) как приближенную (модельную) и описывать с ее помощью поле не только при $|z' - V^*t|$, удовлетворяющих условию (4.16), но и при $|z' - V^*t| \gg \sqrt{t} |\alpha - i\beta|^{1/2}$. При таком подходе из (4.13) получаем

$$\psi(z, t) \simeq \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{t\gamma^*}} \exp \left\{ i(k^*z' - \omega^*t) + \gamma_{\max}t - \frac{(z' - V^*t)^2 (\alpha + i\beta)}{2t(\alpha^2 + \beta^2)} \right\}; \quad t\gamma_{\max} > 1, \quad (4.17)$$

где

$$\bar{\psi} = \left(2\pi \frac{\gamma^*}{\alpha - i\beta} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\bar{h}(k, \omega(k))}{(\partial \epsilon_0 / \partial \omega)_{\omega_n(k)}} \right\}_{k=k^*}.$$

Согласно (4.17), точка $z = z_{\text{опт}}$, соответствующая максимуму амплитуды потенциала, перемещается в пространстве с групповой скоростью, соответствующей максимальному инкременту:

$$z_{\text{опт}}(t) = z_0 + V^*t. \quad (4.18)$$

Этот эффект можно назвать конвекцией возмущения. Вблизи $z = z_{\text{опт}}$ амплитуда потенциала растет во времени по закону $\exp(\gamma_{\max}t)$. Такая временная зависимость амплитуды имеет место при условии (4.16), т. е. как раз тогда, когда уравнение (4.18) наиболее точно.

В рамках модели (4.17) размер $\Delta z \simeq \sqrt{t} |\alpha - i\beta|^{1/2}$ характеризует область локализации основной части возмущенного поля. Видно, что эффективный размер возмущения растет во времени (возмущение расплывается в пространстве). Скорость расплывания определяется вторыми производными частоты и инкремента при $k = k^*$.

Из (4.17) вытекает также, что с течением времени в первоначально широком спектре по k выделяется группа

фурье-компонент с волновыми числами $k \approx k^*$; амплитуды этой группы растут быстрее, чем при k , существенно отличном от k^* . Физически это соответствует тому, что возмущение типа рис. 4.1 приобретает форму, указанную на рис. 4.2.

Итак, поведение поля, описываемое уравнением (4.17), можно представить как результат конкуренции отмеченных выше эффектов конвекции и расплывания, сопровождаемой временным нарастанием. Конвекция приводит к смещению максимума амплитуды потенциала из фиксированной точки z в другие точки пространства. В случае точечного возмущения и отличной от нуля групповой скорости V^* это соответствовало бы исчезновению поля в точке z . Однако вследствие увеличения во времени эффективного размера возмущения (расплывания) поле выносится из этой точки только частично. Остающаяся часть нарастает во времени как $\exp(\gamma_{\max}t)$. Такое нарастание компенсирует ушедшее из этой точки поле, если, согласно (4.17):

$$\gamma_{\max} > \frac{(V^*)^2}{2} \left(\frac{|\gamma''|}{(\gamma'')^2 + (\text{Re } \omega'')^2} \right)_{k=k^*}. \quad (4.19)$$

Этот результат можно представить также как малость групповой скорости V^* по сравнению с некоторой критической $V_{\text{кр}}$, где $V_{\text{кр}}$ определено соотношением

$$V_{\text{кр}}^2 = 2\gamma_{\max} \left(\frac{\gamma'' + \text{Re } \omega''}{|\gamma''|} \right)_{k=k^*}. \quad (4.20)$$

Через $V_{\text{кр}}$ и γ_{\max} можно выразить также

$$\Delta z(t) \simeq V_{\text{кр}} \left(\frac{t}{\gamma_{\max}} \right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Таким образом, для получения приближенной картины поведения первоначально локализованного возмущения в неустойчивой плазме достаточно знать только три величины: γ_{\max} , V^* и $V_{\text{кр}}$.

В качестве примера рассмотрим неустойчивость двух равноплотностных холодных потоков. В п. 1 § 1.5 соответствующее дисперсионное уравнение было исследовано для $V_2 = -V_1 \equiv V$. При этом

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \frac{\omega_p}{2}; \quad V^* = 0; \\ V_{\text{кр}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} V; \quad \beta = 0; \quad |\alpha| = \frac{3}{2} \frac{V^2}{\omega_p}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

В этом случае конвекция отсутствует, так что поле нарастает в области первоначальной локализации как $\exp(\gamma_{\max} t)$.

При произвольных V_1 и V_2 вместо (4.22) можно получить

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \frac{\omega_p}{2}; \quad V^* = \frac{V_1 + V_2}{2}; \\ V_{\text{кр}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{|V_1 - V_2|}{2}, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \frac{3}{8} \frac{(V_1 - V_2)^2}{\omega_p}. \end{aligned} \right\} (4.22')$$

Отсюда следует, что поле в первоначально заданной области нарастает, если

$$|V_1 + V_2| < \frac{\sqrt{3}}{2} |V_1 - V_2|. \quad (4.23)$$

Как и исходное уравнение (4.17), этот критерий справедлив лишь по порядку величины.

§ 4.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости

Как и в § 4.2, исследуем поле возмущения, первоначально локализованного в окрестности точки z_0 и имеющего широкий набор фурье-гармоник. В отличие от § 4.2, где основное внимание уделялось полю вблизи точки его максимума, теперь выясним поведение поля при фиксированном z , и в частности вблизи точки его первоначальной локализации.

1. Критерии абсолютной и конвективной неустойчивостей. Для простоты полагаем, что неустойчивости соответствует только какая-либо одна ветвь колебаний $\omega_\alpha = \omega_\alpha(k)$. Обозначив k_1 и k_2 границы интервала волновых чисел, на котором $\gamma(k) > 0$, и положив $t \rightarrow \infty$, в интеграле (4.5) можно заменить бесконечные пределы интегрирования конечными, от k_1 до k_2 . На этих пределах $\omega(k)$ вещественно и равно соответственно $\omega_1 = \omega(k_1)$ и $\omega_2 = \omega(k_2)$. Если интегрирование по k заменить интегрированием по $\omega = \omega(k)$, то асимптотическое значение (4.5) можно представить в виде

$$\psi(z, t) \sim \int_C d\omega \frac{dk(\omega)}{d\omega} \frac{\exp[ik(\omega)z - i\omega t]}{[\partial \epsilon(\omega, k) / \partial \omega]_{k=k(\omega)}}. \quad (4.24)$$

Путь интегрирования C изображен на рис. 4.3. Его можно вычертить по известным функциям $\text{Re } \omega = \text{Re } \omega(k)$, $\gamma = \gamma(k)$. (В случае холодного пучка малой плотности, проходящего через холодную плазму, эти функции изображены на рис. 1.1.) Очевидно, во всех точках контура C функция $k = k(\omega)$ вещественна.

Вычислим интеграл (4.24), смещая контур C в нижнюю полуплоскость комплексного ω . Если в области между кривой C и осью абсцисс (см. рис. 4.3) функция $k(\omega)$ аналитична, то интегрирование по контуру C сводится к интегрированию по контуру C_1 , изображенному на рис. 4.4, а. На контуре C_1 мнимая часть ω отрицательна, и потому асимптотическое значение (4.24) при всех конечных z

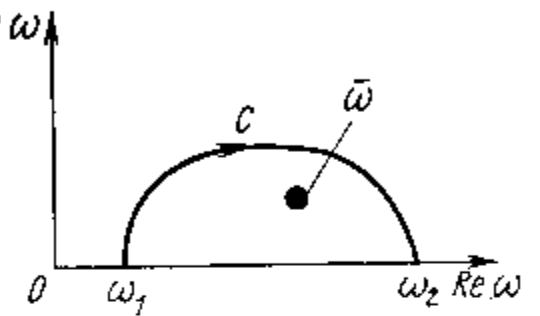


Рис. 4.3. Путь интегрирования в формуле (4.24)

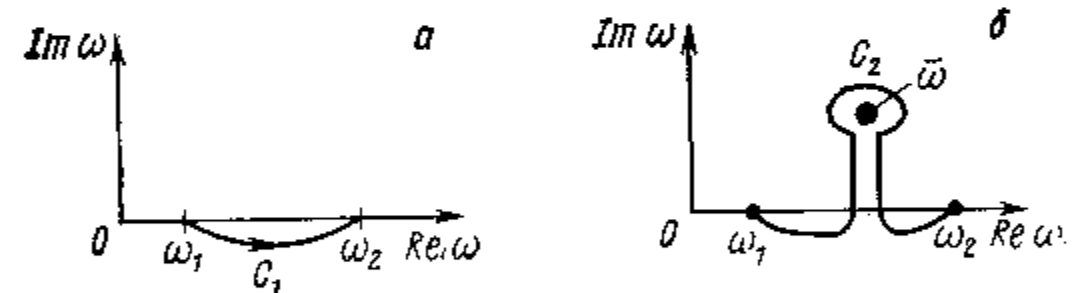


Рис. 4.4. Пути интегрирования при конвективной (а) и абсолютной (б) неустойчивостях

(и в том числе при $z = z_0$) в этом случае равно нулю, что соответствует конвективной неустойчивости.

Функция $\omega = \omega(k)$ в области между контуром C и осью абсцисс (см. рис. 4.3) может иметь точки перегиба. Эти значения $\omega \equiv \bar{\omega}$ соответствуют точкам ветвления обратной функции $k = k(\omega)$. В этом случае деформирование контура C в контур C_1 , лежащий целиком в нижней полуплоскости ω , невозможно. Можно, однако, преобразовать C в C_2 , изображенный на рис. 4.4, б, так, чтобы контур C_2 не пересекал линии разреза функции $k = k(\omega)$. Интегрирование по отрезкам контура C_2 , окружающим линию разреза, приводит к асимптотическому выражению

для (4.24) типа

$$\psi(z, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-i\bar{\omega}t) \quad (\text{Im } \bar{\omega} > 0), \quad (4.25)$$

предел которого бескопечен (абсолютная неустойчивость).

Результат (4.25) получается следующим образом. Учитываем, что при $t \rightarrow \infty$ важно интегрирование только по малому участку контура C_2 вблизи $\omega = \bar{\omega}$. При $\omega = \bar{\omega}$ и $k \approx k(\bar{\omega}) \equiv \bar{k}$ из уравнения $\epsilon_0(k, \omega) = 0$ имеем

$$\epsilon_0(k, \omega) \approx \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial \omega} \right)_{\substack{\omega=\bar{\omega} \\ k=\bar{k}}} (\omega - \bar{\omega}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial k^2} \right)_{\substack{\omega=\bar{\omega} \\ k=\bar{k}}} (k - \bar{k})^2 = 0. \quad (4.26)$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\bar{\omega}} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega - \bar{\omega}}}. \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в уравнение (4.24), в котором контур C заменен C_2 , и выполняя интегрирование по ω , приходим к (4.25).

Из рассмотренного выше вытекает следующий критерий различения абсолютной и конвективной неустойчивостей (критерий Файнберга — Курилко — Шапиро). Неустойчивость является абсолютной, если функция $\omega_\alpha = \omega_\alpha(k)$ имеет точку перевала ($d\omega/dk = 0$) в верхней полуплоскости между контуром $\omega_\alpha(k)$, соответствующим вещественным k , и вещественной осью ω (см. рис. 4.3). В противном случае неустойчивость конвективная.

При получении этого результата мы предполагаем, что имеется только одна ветвь неустойчивых колебаний $\omega_\alpha = \omega_\alpha(k)$. Более сложный случай нескольких ветвей колебаний с $\gamma > 0$ рассмотрел Бриггс.

Применим изложенный выше метод к выяснению характера неустойчивости в системе холодный пучок — холодная покоящаяся плазма [дисперсионное уравнение (1.46)]. Точки перевала можно найти, дифференцируя (1.46) по k при $d\omega/dk = 0$. В результате получаем, что в этом случае точки перевала у функции $\omega(k)$ отсутствуют вообще, т. е. соответствующая неустойчивость — конвективная.

2. **Графический метод Бриггса определения абсолютной и конвективной неустойчивостей.** В случае

сложного дисперсионного уравнения найти точки перевала в комплексной области k и выяснить вопрос, относятся ли эти точки к исследуемой ветви колебаний, можно, используя графический метод, предложенный Бриггсом. Возьмем несколько точек на контуре C рис. 4.3 и проведем из них прямые линии с $\text{Re } \omega = \text{const}$ до пересечения с вещественной осью ω (так, как указано на рис. 4.5).

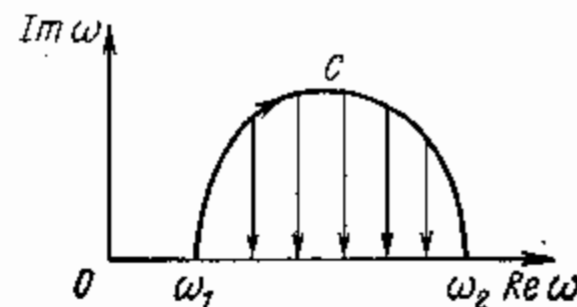


Рис. 4.5. Схема смещения контура C при переходе к вещественным ω

Для ω , лежащем на этих линиях, с помощью дисперсионного уравнения найдем функцию $k_\beta = k_\beta(\omega)$; индекс β означает, что должно быть взято решение, вещественное при ω , лежащем на контуре C . При движении по линиям $\text{Re } \omega = \text{const}$ (на рис. 4.5 изображено стрел-

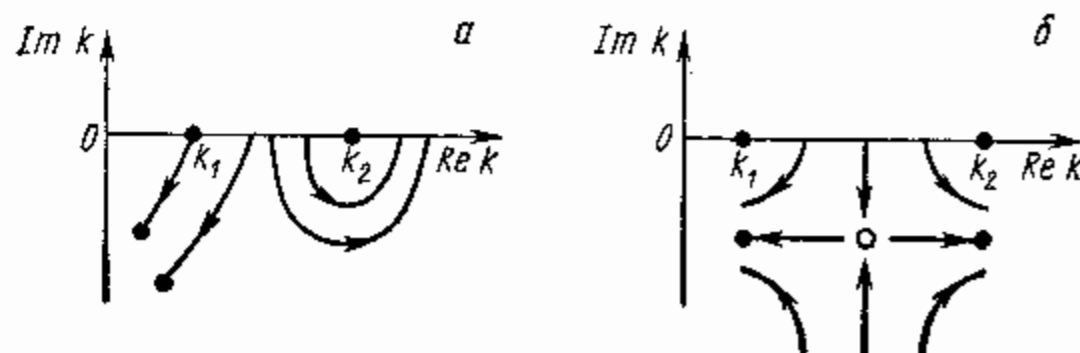


Рис. 4.6. Кривые $k = k(\omega)$, соответствующие ω , лежащим на линиях рис. 4.5 при конвективной (а) и абсолютной (б) неустойчивостях

ками) соответствующие кривые $k_\beta = k_\beta(\omega)$ будут такими, как на рис. 4.6, а [при отсутствии точки перевала $\omega = \omega(k)$], либо такими, как на рис. 4.6, б (в случае, если есть точка перевала). Рис. 4.6, а соответствует конвективной неустойчивости, а рис. 4.6, б — абсолютной.

§ 4.4. Волновой пакет

1. **Поле волнового пакета.** Пусть начальное возмущение таково, что функция $h(k)$ отлична от нуля только в малой окрестности около $k = k_0$ (см. рис. 4.2).

Такое возмущение будем называть волновым пакетом. Рассмотрим поведение во времени пакета гауссова типа (4.10). Подставляя (4.10) в (4.5) и полагая, что наиболее острой функцией является гауссова экспонента, находим следующее выражение для $\psi(z, t)$:

$$\psi(z, t) \sim \exp[i(k_0 z' - \omega_0 t) - (z' - V_0 t)^2 / 2a^2]. \quad (4.28)$$

Здесь

$$\omega_0 = \omega(k_0); \quad V_0 = [\partial \operatorname{Re} \omega_0(k) / \partial k]_{k=k_0}; \quad z' = z - z_0.$$

Соотношение (4.28) получено в предположении:

$$a^2 > t \max \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial k^2}, \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \omega}{\partial k^2} \right)_{k=k_0}; \quad (4.29)$$

$$\frac{t}{a} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial k} \right)_{k=k_0} < 1. \quad (4.30)$$

Критерий (4.29) противоположен (4.15). Он соответствует пренебрежению эффектом расплывания пакета. При условии (4.30) нарастание поля во всех точках пакета происходит с одинаковым инкрементом. Член с V_0 в уравнении (4.28) следует удерживать только при $V_0 \gg \gg (\partial \gamma / \partial k)_{k=k_0}$.

Из (4.28) следует, что максимум амплитуды волнового пакета перемещается в пространстве с групповой скоростью, соответствующей среднему волновому числу пакета:

$$z_{\text{центр}}(t) = z_0 + V_0 t. \quad (4.31)$$

Он растет с инкрементом $\gamma_0 = \gamma(k_0)$:

$$|\psi|_{z'=V_0 t} \sim \exp(\gamma_0 t). \quad (4.32)$$

2. Баланс энергии волнового пакета в плазме с малой диссипацией. Если диссипативная часть диэлектрической проницаемости мала, а возмущение имеет вид плоской волны, то можно ввести понятие энергии колебаний [см. уравнение (2.19)], а процесс нарастания или затухания колебаний характеризовать уравнением баланса энергии (2.18). Покажем, что аналогичные соотношения имеют место и для возмущений типа волнового пакета.

Как и в § 2.2, возмущения будем считать потенциальными. Для них из уравнений Максвелла (II) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} + \mathbf{jE} = 0. \quad (4.33)$$

Электрическое поле волнового пакета можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \exp[i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - i\omega_0 t] \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t), \quad (4.34)$$

где слабозависящая от координат часть $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ равна

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r} - i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) t] d\mathbf{k}. \quad (4.35)$$

Входящий в (4.33) ток \mathbf{j} определяется выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \exp[i\mathbf{k} \mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}} t]. \quad (4.36)$$

В интересующем нас случае возмущений типа волнового пакета ток \mathbf{j} можно выразить через $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ и его производные по координатам и времени. С этой целью разложим функцию $\sigma(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$ в ряд вблизи точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = & \sigma(\mathbf{k}_0, \omega_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{k}_0} + \\ & + (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) \frac{\partial \sigma}{\partial \omega_0} + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

Этот ряд можно оборвать, поскольку $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ отлично от нуля только в малой окрестности \mathbf{k}_0 .

Используя соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial r_\alpha} = & i \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_\alpha \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r} - \\ & - i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) t] \mathbf{E}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}; \\ \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = & - \int (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r} - \\ & - i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) t] \mathbf{E}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

из (4.36) и (4.37) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = & \sigma(\mathbf{k}_0, \omega_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - i \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{k}_0} \exp[i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - i\omega_0 t] \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial r_\alpha} + \\ & + i \frac{\partial \sigma}{\partial \omega_0} \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)] \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

При малой диссипации функцию $\sigma(\omega_0)$ можно разложить в конечный ряд по γ_0 :

$$\sigma(\mathbf{k}_0, \omega_0) = \sigma(\mathbf{k}_0, \operatorname{Re} \omega_0) + i\gamma_0 \frac{\partial \sigma(\mathbf{k}_0, \operatorname{Re} \omega_0)}{\partial \operatorname{Re} \omega_0}. \quad (4.40)$$

С учетом (4.39) и (4.40) уравнение (4.33), усредненное по периоду колебаний, сводится к виду

$$\frac{dW}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 2\gamma_0 W. \quad (4.41)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} W &= \operatorname{Re} \omega_0 \frac{\partial \operatorname{Re} \epsilon_0(\operatorname{Re} \omega_0, \mathbf{k}_0)}{\partial \operatorname{Re} \omega_0} \frac{|E_0(\mathbf{r}, t)|^2}{8\pi}; \\ \mathbf{S} &= -\omega_k \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \mathbf{k}} \frac{|E_0|^2}{8\pi} \equiv \mathbf{V}_0 W; \\ \mathbf{V}_0 &= (\partial \omega_k / \partial \mathbf{k})_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Уравнение (4.41) представляет собой баланс энергии волнового пакета. Величины W и \mathbf{S} означают энергию и поток энергии колебаний в точке \mathbf{r} и в момент времени t .

§ 4.5. Возбуждение колебаний неустойчивой плазмы сторонними источниками и усиление волн

1. Постановка задачи. Во всем предыдущем изложении (гл. 1—4) предполагалось, что все заряды плазмы (электроны, ионы) движутся самосогласованно, так, как это вытекает из уравнения Больцмана. Учтем теперь, что наряду с этими зарядами в плазме могут быть и такие, движение которых определяется не самосогласованным электрическим полем, а какими-либо внешними факторами. Такого типа заряды будем называть сторонними источниками.

Роль сторонних источников могут играть вводимые внутрь плазмы (либо на ее поверхность) проводники, с искусственно регулируемым зарядом. Следует также иметь в виду, что уравнение Больцмана описывает только усредненное поведение зарядов и не учитывает тепловых флуктуаций. Эти флуктуирующие заряды также могут служить сторонними источниками самосогласованного поля.

При наличии сторонних источников уравнение Пуассона имеет вид

$$-\Delta \psi(z, t) = 4\pi \rho(z, t) + 4\pi \rho_{\text{ст}}(z, t). \quad (4.43)$$

Здесь ρ — плотность самосогласованных зарядов, а $\rho_{\text{ст}}$ — плотность сторонних зарядов (плотность источников).

Вычислим поле, получающееся вследствие возбуждения колебаний плазмы этими сторонними зарядами.

2. Возбуждение колебаний мгновенным источником. Рассмотрим сначала возбуждение колебаний сторонним источником, действующим в течение очень малого промежутка времени, т. е. таким, что

$$\rho_{\text{ст}}(z, t) = q(z, t) \delta(t - t_0); \quad t_0 > 0. \quad (4.44)$$

Предположим, что при $t < t_0$ плазма находилась в невозмущенном состоянии. Функцию распределения при $t = t_0$ считаем равновесной, $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$. В этом случае, согласно (2.3), возмущенная функция распределения связана с фурье-лаплас-компонентой возмущенного потенциала ψ соотношением

$$f_{kp}(v) = \frac{1}{p + ikv} \frac{ike\psi_{kp}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (4.45)$$

Вычисляя с помощью (4.45) самосогласованный заряд и подставляя результат в фурье-лаплас-компоненту уравнения (4.43), аналогично (2.4) получаем

$$\psi_{kp} = \frac{4\pi q_k(t_0) \exp(-pt_0)}{k^2 \epsilon_0(ip, k)}. \quad (4.46)$$

Отсюда видно, что при возбуждении колебаний мгновенным сторонним источником получается такая же картина поля, как и в задаче с начальными условиями: поведение поля вслед за моментом возбуждения целиком определяется самосогласованным движением зарядов. Возбуждаются колебания, частоты которых удовлетворяют дисперсионному уравнению $\epsilon_0(\omega, k) = 0$ (собственные колебания). Пространственно-временная зависимость потенциала в этом случае определяется следующим выражением, сходным с (2.8):

$$\begin{aligned} \psi(z, t, t_0) &\sim 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikz) \times \\ &\times \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} \frac{q_k(t_0) \exp[-i\omega(t-t_0)]}{k^2 \epsilon_0(\omega, k)} d\omega. \end{aligned} \quad (4.47)$$

3. Возбуждение колебаний источником, произвольно зависящим от времени. Чтобы подчеркнуть, что возмущение обязано источнику, действующему в момент времени $t = t_0$, потенциал ψ в уравнении (4.47) снабжен индексом t_0 . Такая форма записи удобна для обобщения результатов на случай немгновенных источников, к рассмотрению которых мы теперь переходим.

Любой немгновенный источник $\rho_{ст}(z, t)$ можно представить в виде совокупности мгновенных:

$$\rho_{ст}(z, t) = \int_0^t q(z, t_0) \delta(t - t_0) dt_0. \quad (4.48)$$

Здесь предположено, что источники отсутствуют при $t < 0$.

Каждый из мгновенных источников приводит к отклику, определяемому уравнением (4.47). Поэтому результирующий потенциал, равный сумме откликов всех источников, получается интегрированием (4.47) по всем $t_0 < t$:

$$\psi(z, t) \sim \int_0^t dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikz) \times \\ \times \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{q_k(t_0) \exp[-i\omega(t-t_0)]}{k^2 \epsilon_0(\omega, k)} d\omega. \quad (4.49)$$

Интеграл по ω в (4.49) можно свести к сумме по ветвям колебаний с частотами $\omega_\alpha = \omega_\alpha(k)$ [ср. с (4.5)]. В случае неустойчивой плазмы основной вклад в асимптотический предел ($t \rightarrow \infty$) этого выражения дают только ветви с $\text{Im } \omega(k) > 0$. Бесконечные пределы интегрирования по k можно в этом случае заменить конечными, соответствующими интервалу комплексных $\omega(k)$ с $\text{Im } \omega(k) > 0$ (ср. с § 4.3), а интеграл по вещественным k — интегралом по комплексным ω , лежащим на контуре C (см. рис. 4.3). В результате (4.49) сводится к виду, аналогичному (4.24):

$$\psi(z, t) \sim \int_C d\omega \frac{dk(\omega)}{d\omega} \frac{\exp[ik(\omega)z]}{k^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_{k=k(\omega)}} \times \\ \times \int_0^t dt_0 q_k(t_0) \exp[-i\omega(t-t_0)]. \quad (4.50)$$

4. Усиление волн, возбуждаемых монохроматическим источником. В случае монохроматического источника частоты Ω функция $q_k(t_0)$ имеет вид

$$q(t_0) \sim \exp(-i\Omega t_0). \quad (4.51)$$

При этом условии из (4.50) следует

$$\psi(z, t) \sim \int_C d\omega \frac{dk(\omega)}{d\omega} \frac{\exp[ik(\omega)z - i\omega t]}{k^2(\omega) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_{k=k(\omega)} (\omega - \Omega)}. \quad (4.52)$$

Если неустойчивость конвективная, а частота Ω лежит в интервале между ω_1 и ω_2 (определенными в § 4.3), то интегрирование по контуру C сводится к вычету в точке $\omega = \Omega$. В этом случае асимптотика потенциала имеет вид

$$\psi(z, t) \sim \exp[ik(\Omega)z - i\Omega t]. \quad (4.53)$$

Смысл функции $k = k(\Omega)$ можно пояснить с помощью рис. 4.5 и 4.6. Эта величина удовлетворяет следующим условиям.

1. Функция $k = k(\Omega)$ — это решение дисперсионного уравнения, вычисляемого при вещественном Ω . Оно, вообще говоря, комплексно, $\text{Im } k \neq 0$.

2. $k(\Omega)$ — не любое решение дисперсионного уравнения, а только то, которое получается из вещественного решения $k = k(\omega)$ для комплексных ω , лежащих в верхней полуплоскости (на контуре C рис. 4.5), при деформации контура C на вещественную ось плоскости ω .

Если для некоторых Ω , лежащих в интервале (ω_1, ω_2) , $\text{Im } k(\Omega) < 0$, то, согласно (4.53), возмущенное поле экспоненциально нарастает в пространстве (при $z > 0$). Этот эффект называется **у с и л е н и е м в о л н**.

Экспоненциальный закон пространственного нарастания поля [при $\text{Im } k(\Omega) < 0$] получается для очень больших моментов времени t и конечных z [это подразумевалось при переходе от (4.52) к (4.53)]. Если считать большим не только t , но и z , то закон (4.53) будет искажаться.

Рассмотрим усиление волн в системе холодный пучок — холодная плазма [дисперсионное уравнение (1.46)]. Разрешая (1.46) относительно волнового числа, имеем (см. также рис. 4.6, а):

$$k = \frac{\omega}{V} \pm \frac{\sqrt{\alpha} \omega_p / V}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}. \quad (4.54)$$

В § 1.5 было показано, что вещественная часть частоты неустойчивых колебаний лежит в интервале

$$0 < \operatorname{Re} \omega < \omega_p \sqrt{1 + \alpha^{1/3}}. \quad (4.55)$$

Согласно (4.54), этот интервал частот шире того, на котором $\operatorname{Im} k \neq 0$. Поэтому усиливаться могут только волны с частотами $0 < \omega < \omega_p$.

Чтобы выяснить, действительно ли решения (4.54) с $\operatorname{Im} k < 0$ соответствуют усилению, необходимо рассмотреть путь следования корней $k = k(\omega)$ при движении ω с контура C к вещественной оси. Эти корни ведут себя так, как показано на рис. 4.6, а (Бриггс). Видно, что все комплексные k , определяемые уравнением (4.54), удовлетворяют отмеченным выше условиям 1 и 2 и потому соответствуют усилению.

Примером волн, дисперсионное уравнение которых имеет комплексные k , не соответствующие усилению, являются электромагнитные волны [уравнение (1.5)]. В этом случае

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (4.56)$$

Видно, что k комплексно, если $\omega < \omega_p$. Эти комплексные корни не могут перейти в вещественные ни при каких значениях комплексного ω с $\operatorname{Im} \omega > 0$ и $|\operatorname{Re} \omega| < \omega_p$. Поэтому они не удовлетворяют сформулированному выше условию 2. Дополнительный анализ показывает, что эти комплексные k соответствуют скиннующимся волнам (Бриггс).

Если неустойчивость обусловлена малыми диссипативными эффектами, так что вещественная и мнимая части частоты колебаний определяются формулами (2.16) и (2.17), то, как нетрудно проверить, вещественная и мнимая части волнового числа усиливаемых волн удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon_0(\operatorname{Re} k, \omega) &= 0; \\ \operatorname{Im} k(\omega) &= -\frac{\gamma(\operatorname{Re} k)}{V_{\text{гр}}(\operatorname{Re} k)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

В этом случае для нахождения коэффициента усиления нет необходимости заново решать дисперсионное уравнение, если при исследовании устойчивости уже были найдены функции $\gamma(k)$ и $\operatorname{Re} \omega(k)$.

Отметим некоторые особенности усиления волн в холодной плазме, через которую проходит пучок малой плотности. Если пучок горячий (кинетическая неустойчивость, § 3.2) и если в дисперсионном уравнении учитывается только диссипативная часть вклада пучка, то $\operatorname{Re} \omega$ неустойчивых колебаний не зависит от волнового числа ($\operatorname{Re} \omega = \omega_{p0}$). В этом случае $V_{\text{гр}} = 0$ и из (4.57) следует, что коэффициент усиления волн частоты $\omega = \omega_{p0}$ бесконечен. Чтобы найти правильное выражение для $\operatorname{Im} k(\omega)$, необходимо учесть в дисперсионном уравнении малые вещественные члены, обусловленные тепловым движением плазмы и пучка. В этом случае с помощью (3.3) можно найти, что групповая скорость конечна и при $k^2 d_1^2 \gg 1$ равна

$$V_{\text{гр}} = \frac{3kT}{m\omega_{p0}} + \frac{\omega_{p0}}{k} \frac{1}{k^2 d_1^2}. \quad (4.58)$$

Формально бесконечным получается коэффициент усиления волн с $\omega = \omega_p$ и в системе холодный пучок — холодная плазма [уравнение (4.54)]. Учет теплового движения плазмы приводит к следующему уточнению этого результата:

$$\operatorname{Im} k(\omega_p) = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\omega_p}{V} \left(\frac{V}{v_{T0}}\right)^{2/3}. \quad (4.59)$$

Библиографический обзор к гл. 4

1. Haefl A. V. Space-charge wave amplification effects.—«Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 1532.
2. Pierce J. R. Possible fluctuations in electron streams due to ions.—«J. Appl. Phys.», 1948, v. 19, p. 231.
3. Haefl A. V. The electron wave tube. A novel method of generation and amplification of microwave energy.—«Proc. IRE», 1949, v. 37, p. 4.
4. Pierce J. R. Increasing space-charge waves.—«J. Appl. Phys.», 1949, v. 20, p. 1060.
В работах [1—4] исследовалось усиление волн, обусловленное гидродинамической пучковой неустойчивостью (§ 4.5). Получены формула (4.54) и аналогичные ей.
5. Ахизер А. И., Файнберг Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1951, т. 21, с. 1262.
Вычислен максимальный коэффициент усиления волн в системе плазма — пучок, формула (4.59).
6. Герцештейн М. Е. Самовозбуждение колебаний в положительном столбе газового разряда.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1952, т. 23, с. 669.

- Рассмотрено кинетическое усиление. Получена формула (4.57) для $\text{Im } k$.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Физматгиз, 1954, § 29.
Дано определение абсолютной и конвективной неустойчивостей (§ 4.3).
 8. Boyd G. D., Field L. M., Gould R. W. Excitation of plasma oscillations and growing plasma waves.—«Phys. Rev.», 1958, v. 109.
 9. Sumi M. Theory of spatially growing plasma waves.—«J. Proc. Phys. Soc. Japan.», 1959, v. 14, p. 653.
В работах [8, 9] проводится численный расчет усиления волн с учетом теплового движения плазмы.
 10. Sturrock P. A. Kinematics of growing waves.—«Phys. Rev.», 1958, v. 112, p. 1488.
Обсуждается, как отличить друг от друга: а) абсолютную и конвективную неустойчивости (§ 4.3); б) усиление и затухание (§ 4.5). Подчеркнуто, что усиление волн возможно лишь в неустойчивой плазме.
 11. Drummond J. E., Chang D. B. Unexcited plasma.—«Bull. Amer. Phys. Soc.», 1958, v. 3, p. 411.
Показано, что неустойчивость холодного пучка, движущегося в холодной плазме, является конвективной (§ 4.3).
 12. Файнберг Я. Б., Курилко В. И., Шапиро В. Д. К вопросу о характере неустойчивостей при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой.—«Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 633.
Изложен регулярный метод различения абсолютной и конвективной неустойчивостей (§ 4.3). Рассмотрен ряд приложений и, в частности, задача о характере неустойчивостей в плазме.
 13. Vineman O. How to distinguish amplifying and evanescent waves? — In: Plasma Physics. Ed. J. E. Drummond. McGraw-Hill Book Company, Inc., N.Y., 1961.
 14. Половин Р. В. О критериях неустойчивости и усиления.—«Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 1220.
В работах [13, 14] обсуждается круг вопросов, затронутых ранее в работе Старрока [10] (§ 4.3, 4.5).
 15. Feix M. Propagation of a double stream instability in a plasma.—«Nuovo Cimento», 1963, v. 27, p. 1130.
Рассматривается динамика пространственно локализованных возмущений с широким набором волновых чисел (§ 4.2).
 16. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
Обсуждается поведение волновых пакетов (§ 4.4) и возмущений с широким набором волновых чисел (§ 4.2). Приводится уравнение баланса энергии волнового пакета (§ 4.4).
 17. Briggs R. J. Electron stream interaction with plasma. MIT, Cambridge, Massachusetts, 1964.
В этой монографии можно найти более подробное обсуждение большинства вопросов, изложенных в настоящей главе, а также критический анализ предшествующих работ.
 18. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
Рассматривается энергетический баланс волнового пакета (§ 4.4).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГЛАВА 5

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ§ 5.1. Диэлектрическая
проницаемость холодной плазмы

Пусть температура какой-либо группы частиц равна нулю, $T = 0$. Поведение этих частиц в электростатическом возмущенном и постоянном магнитном полях описывается гидродинамическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} -i(\omega - k_z V_0) n' + ikV'n_0 &= 0; \\ -i(\omega - k_z V_0) V' &= -\frac{ie}{m} k\psi + [V'\omega_B]. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эти уравнения следуют из (1.10). Предполагается, что равновесная скорость частиц V_0 направлена вдоль B_0 . Вектор $\omega_B = \omega_B e_z$, где $\omega_B = eB_0/mc$ — циклотронная частота данного сорта частиц; ψ — потенциал возмущенного поля, определяемый соотношением $E' = -\nabla\psi$. Предполагается $B_0 \parallel z$.

Решая систему (5.1), находим возмущенную плотность зарядов $\rho = en'$, а затем с помощью формулы типа (1.36) — вклад интересующей нас группы частиц в скалярную диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{\omega_p^2 \cos^2 \theta}{(\omega - k_z V_0)^2} - \frac{\omega_p^2 \sin^2 \theta}{(\omega - k_z V_0)^2 - \omega_B^2}. \quad (5.2)$$

Здесь θ — угол между k и B_0 . Член с $\cos^2 \theta$ в $\epsilon_0^{(\alpha)}$ обязан возмущенному движению частиц вдоль B_0 , а с $\sin^2 \theta$ — поперек B_0 .

В частном случае покоящейся плазмы

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = -\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta - \frac{\omega_p^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_B^2}. \quad (5.3)$$

Из сравнения (5.2) с (1.36') видно, что магнитное поле слабо влияет на диэлектрическую проницаемость, если $|\omega - k_z V_0| \gg \omega_B$ либо $\sin^2 \theta \ll 1$. Если же ни одно из этих неравенств не выполняется, то роль магнитного поля оказывается важной.

§ 5.2. Метод интегрирования по траекториям

Чтобы получить $\varepsilon_0^{(\omega)}$ для случая, когда тепловое движение частиц существенно, нужно прежде всего найти решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + [\mathbf{v}, \omega_B] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m} \nabla \psi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.4)$$

Это уравнение получается из (I) в предположении, что столкновения между частицами не существенны, а возмущенное поле \mathbf{E}' — потенциальное.

Будем решать уравнение (5.4) методом интегрирования по траекториям, суть которого сводится к следующему. Выразим в (5.4) все функции переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} , t через новые переменные \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , τ , связанные с \mathbf{r} , \mathbf{v} , t соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau) &= \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau'; \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau) &= \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Здесь $\mathbf{F}_0 \equiv [\mathbf{v}, \omega_B]$, t_0 — произвольный момент времени.

Очевидно, в переменных \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , τ функции \mathbf{r} и \mathbf{v} представляют собой взятые в момент времени τ значения координат и скорости частицы, которая при $\tau = t_0$ находится в точке \mathbf{r}_0 и имеет скорость \mathbf{v}_0 . При таком выборе новых переменных имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right)_{t, \mathbf{v}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{t, \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = \mathbf{v}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = \mathbf{F}_0, \quad (5.7)$$

то правая часть (5.6) совпадает с левой частью (5.4), так что в новых переменных кинетическое уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = \frac{e}{m} \nabla \psi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.8)$$

Отсюда находим

$$f(\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = f(\tau_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) + \frac{e}{m} \int_{\tau_0}^{\tau} \nabla \psi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} dt'. \quad (5.9)$$

Здесь $f(\tau_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ — начальное возмущение функции распределения. Ниже будем считать, что возмущение включается при $t_0 = -\infty$ и что $f(-\infty, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ пренебрежимо мало по сравнению с $f(\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ (это соответствует предположению, что искомая частота колебаний имеет положительную мнимую часть, ср. с § 2.1). При этом вместо (5.9) имеем дело с более простым уравнением

$$f(\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\tau} \nabla \psi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} dt'. \quad (5.10)$$

Переходим к вычислению интеграла по t' . Замечаем, что невозмущенная функция $f_0(\mathbf{v})$, являющаяся решением уравнения

$$\mathbf{v} \nabla f_0 + [\mathbf{v}, \omega_B] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.11)$$

может быть представлена в виде $f_0(\mathbf{v}) = F(\varepsilon_{\perp}, v_z)$, где $\varepsilon_{\perp} = v_{\perp}^2/2$, v_{\perp} , v_z — скорость движения частиц поперек и вдоль магнитного поля B_0 . Поэтому

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}_{\perp} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \mathbf{e}_z \frac{\partial F}{\partial v_z}. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в (5.10) и вынося константы движения $\partial F / \partial \varepsilon_{\perp}$ и $\partial F / \partial v_z$ за знак интеграла по t' , получаем

$$f = \frac{e\psi}{m} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} - [(\omega - k_z v_z) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + k_z \frac{\partial F}{\partial v_z}] I \right\}, \quad (5.13)$$

где

$$I = -i \int_0^{\infty} \exp \left[i\omega t' - i\mathbf{k} \int_{\tau-t'}^{\tau} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau' \right] dt'. \quad (5.14)$$

Здесь учтено, что $\psi \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и проведено интегрирование по частям с использованием формулы

$$\mathbf{v}_\perp \nabla \psi = \frac{d\psi}{dt} + i(\omega - k_z v_z) \psi. \quad (5.15)$$

Теперь вычисляем интеграл I . Учитывая, что при движении частицы в магнитном поле ее скорость зависит от времени по закону:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_\perp \cos[\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_y(t) &= v_\perp \sin[\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_z(t) &= v_z; \quad \alpha_0 = \arctg \frac{v_y(t_0)}{v_x(t_0)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

проводим интегрирование в показателе экспоненты

$$\mathbf{k} \int_{\tau-t}^{\tau} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau' = k_z v_z t' -$$

$$- \xi \{ \sin(\alpha_0 - \omega_B \tau - \Psi) - \sin[\alpha_0 - \omega_B(\tau - t') - \Psi] \}. \quad (5.17)$$

Здесь

$$\xi = k_\perp v_\perp / \omega_B \equiv k_\perp \rho; \quad \Psi = \arctg k_y / k_x.$$

Часть показателя экспоненты, содержащую $\sin[\alpha_0 - \omega_B(\tau - t')]$, представляем в виде ряда по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} \exp\{-i\xi \sin[\alpha_0 - \omega_B(\tau - t') - \Psi]\} &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) \exp\{-in[\alpha_0 - \omega_B(\tau - t') - \Psi]\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

После этого проводим интегрирование по t' и получаем

$$I = \exp[i\xi \sin(\alpha - \Psi)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n \exp[-in(\alpha - \Psi)]. \quad (5.19)$$

Здесь введены обозначения $\zeta_n = (\omega - n\omega_B - k_z v_z)^{-1}$, $\alpha = \arctg v_y / v_x$.

§ 5.3. Диэлектрическая проницаемость горячей плазмы

С помощью (5.13) и (5.19) находим возмущенную плотность зарядов $\rho = en'$, а затем, как и в § 5.1, с помощью формулы (1.36) вычисляем

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(\alpha)} &= -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} - \left[(\omega - k_z v_z) \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} + k_z \frac{\partial F}{\partial v_z} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь (...) означает интеграл $\int (...) v_\perp dv_\perp dv_z$. В (5.20) было произведено интегрирование по углу α с помощью формулы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \exp(i\xi \sin \alpha - in\alpha) = J_n(\xi). \quad (5.21)$$

Нормировка F предполагается такой, что $\langle F \rangle = n_0$.

Используя соотношение $\sum J_n^2(\xi) = 1$, правую часть (5.20) можно записать еще так:

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{J_n^2}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \left(n\omega_B \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} + k_z \frac{\partial F}{\partial v_z} \right) \right\rangle. \quad (5.22)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (5.20).

1. Покоящаяся плазма с максвелловским распределением по скоростям. Пусть $F = \pi^{-1/2} (m/T)^{3/2} \times \exp(-mv^2/2T)$. Интегрирование по v_z в (5.20) проводится так же, как в § 2.4. При этом в правой части (5.20) появляются функции $W[(\omega - n\omega_B)/k_z v_T]$. [Функция $W(x)$ определена соотношением (2.45).] Интегралы по поперечным скоростям вычисляем с помощью формулы

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\sigma^2 x^2) J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx &= \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\sigma^2}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где I_n — функции Бесселя мнимого аргумента. В результате [ср. с (2.44)]:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{k^2 d^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_T} \sum_n W \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_T} \right) \exp(-z) I_n(z) \right],$$

$$z = k_{\perp}^2 T / m \omega_B^2. \quad (5.24)$$

2. Движущаяся плазма с максвелловским распределением по скоростям, $F \sim \exp[-m(v - V)^2/2T]$, $V \parallel B_0 \parallel z$. Процедура вычисления интегралов по v_z и v_{\perp} остается прежней. В результате для $\varepsilon_0^{(\alpha)}$ получается выражение, отличающееся от (5.24) только заменой $\omega \rightarrow \omega - k_z V$:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega - k_z V}{|k_z| v_T} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_n W \left(\frac{\omega - k_z V - n\omega_B}{|k_z| v_T} \right) \exp(-z) I_n(z) \right]. \quad (5.25)$$

3. Плазма с $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$, $F \sim \exp(-mv_{\perp}^2/2T_{\perp} - mv_z^2/2T_{\parallel})$. В этом случае вместо (5.24) имеем

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd_{\parallel})^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-z_{\perp}) I_n(z_{\perp}) \left\{ 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{n\omega_B}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] W \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) \right\}, \quad (5.26)$$

где $d_{\parallel}^2 = T_{\parallel}/4\pi e^2 n_0$, $z_{\perp} = k_{\perp}^2 T_{\perp}/m\omega_B^2$.

При $T_{\parallel} = 0$ из (5.26) следует

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\omega_p^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_n \exp(-z_{\perp}) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_B)^2} + \frac{n I_n \exp(-z_{\perp}) \sin^2 \theta}{z_{\perp} \omega_B (\omega - n\omega_B)} \right].$$

$$(5.27)$$

Выражение для $\varepsilon_0^{(\alpha)}$ упрощается также в пределе низкочастотных и высокочастотных возмущений (см. § 5.4 и 5.5).

§ 5.4. Диэлектрическая проницаемость в приближении низких частот

Колебания будем называть низкочастотными (по отношению к тому или иному сорту зарядов), если $|\omega - k_z v_z| \ll \omega_B$. Для таких колебаний в сумме (5.20)

важен только член с $n = 0$, так что в этом случае

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} (1 - J_0^2) - \frac{k_z J_0^2}{\omega - k_z v_z} \frac{\partial F}{\partial v_z} \right\rangle. \quad (5.28)$$

При максвелловском распределении частиц по скоростям это означает

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_T} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) I_0(z) \exp(-z) \right]. \quad (5.29)$$

Поскольку при получении (5.28) и (5.29) предполагалось $k_z v_z \ll \omega_B$, то сохранять в этих выражениях все степени параметра $(k_{\perp} \rho)^2$ следует, только если $k_z/k_{\perp} \ll v_z/v_{\perp}$. В частности, при изотропном, и в том числе максвелловском, распределении частиц по скоростям это соответствует углам $\cos \theta \ll 1$.

В пределе длинных волн, $k_{\perp} \rho \ll 1$, и произвольных $\cos \theta$ вытекающее из (5.28) выражение для $\varepsilon_0^{(\alpha)}$ имеет вид

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \sin^2 \theta + \frac{4\pi e^2 k_z}{mk^2} \left\langle \xi_0 \frac{\partial F}{\partial v_z} \right\rangle. \quad (5.30)$$

Аналогично при максвелловском F из (5.29) следует

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_T} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right]. \quad (5.31)$$

Следует отметить, что первые члены в правых частях (5.30) и (5.31) нужно удерживать лишь при $\omega \gg k_z v_z$, в противном случае они малы, как $(k\rho)^2$.

§ 5.5. Диэлектрическая проницаемость в приближении высоких частот

Пусть ω и k таковы, что $|\omega - k_z v_z| \gg \omega_B$, $k\rho \gg 1$. В этом случае вклад в (5.20) дает большое число членов по n (если $k_{\perp} \rho$ не слишком мало). Пренебрегая величинами порядка $\omega_B/|\omega - k_z v_z|$, эти члены можно

просуммировать, и тогда вместо (5.20) получается

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \left[(\omega - k_z v_z) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + k_z \frac{\partial F}{\partial v_z} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{[(\omega - k_z v_z)^2 - (k_{\perp} v_{\perp})^2]^{1/2}} \right\rangle. \quad (5.32)$$

Процедура перехода от (5.20) к (5.32) изложена в работе Ломинадзе и Степанова.

Выражение (5.32) можно получить и непосредственно с помощью формул (5.13) и (5.14). Для этого нужно предположить, что скорость v (v_{θ} , v_{ϕ} , v_z) в (5.14) является константой. Тогда интеграл I окажется равным $I = (\omega - kv)^{-1}$. Подставляя это I в (5.13), проводим интегрирование по углу в пространстве поперечных скоростей и затем стандартным путем приходим к (5.32).

Выражение (5.32) еще более упрощается при $\omega \gg k_z v_z$:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} \left[1 - \frac{\omega}{(\omega^2 - k_{\perp}^2 v_{\perp}^2)^{1/2}} \right] \right\rangle. \quad (5.33)$$

В частном случае δ -функционального распределения по поперечным скоростям, $F \sim \delta(\varepsilon_{\perp} - v_0^2/2)$, отсюда следует

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{\omega_p^2 \omega}{(\omega^2 - k_{\perp}^2 v_0^2)^{3/2}}. \quad (5.34)$$

При максвелловском F вместо этого имеем

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{k_{\perp}^2 d^2} \left[1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{k_{\perp} v_T} W \left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_T} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Можно показать, что в случае $k_z \ll k_{\perp}$ и $k_z v_z < \omega_B$ предельный переход от (5.20) к (5.32) корректен, если только $\text{Im } \omega > \omega_B$. Это имеет простой физический смысл: считать траекторию прямолинейной можно только в том случае, если за время существенного изменения амплитуды возмущенного поля частица не успевает совершить ни одного оборота вокруг своего ларморовского центра. При $k_z v_z > \omega_B$ тепловое движение оказывается эффективнее ларморовского вращения и выполнение условия $\text{Im } \omega > \omega_B$ не обязательно.

Библиографический обзор к гл. 5

1. Gross E. P. Plasma oscillations in a static magnetic field. «Phys. Rev.», 1951, v. 82, p. 232.
Решено кинетическое уравнение для возмущений с $k_z = 0$, $E_z = 0$. Получено дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений с $k_z = 0$.
2. Гордцев Г. В. Колебания плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1952, т. 23, с. 660.
Получено дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений максвелловской плазмы при произвольном k_z .
3. Ситенко А. Г., Степанов К. Н. О колебаниях электронной плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 32, с. 642.
Приведено выражение для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ максвелловской плазмы.
4. Шафранов В. Д. К выводу тензора диэлектрической проницаемости.— В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Вып. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 416.
5. Rosenbluth M. N., Rostoker N. Theoretical structure of plasma equations. «Phys. Fluids», 1959, v. 2, p. 23.
6. Drummond J. E. Basic microwave properties of hot magnetoplasma.—«Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 293.
В § 5.2 использован метод интегрирования по траекториям, развитый в работах [4—6].
7. Bernstein I. V. Waves in plasma in a magnetic field.—«Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 10.
Приведено общее дисперсионное уравнение для максвелловской плазмы в магнитном поле.
8. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. Поглощение энергии высокочастотного электромагнитного поля в высокотемпературной плазме.— В кн.: Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, с. 202.
9. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 181.
В работах [8, 9] приведено общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы с анизотропным распределением частиц по скоростям.
10. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов и электронов.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 38, с. 1840.
Приведено выражение для компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}$ анизотропной плазмы в приближении $\omega \ll \omega_B$, $kr \ll 1$.
11. Степанов К. Н. Кинетическая теория магнитогидродинамических волн.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, с. 1292.
Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ для максвелловской плазмы записан в интегральной форме, удобной для исследования возмущений с $\omega \gg \omega_B$.
12. Степанов К. Н. Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, с. 1155.
Приведено выражение для скалярной проницаемости максвелловской плазмы ε_0 .

13. Harris E. G. Unstable plasma oscillations in a magnetic field. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 34.
Приведено выражение для ϵ_0 в приближении δ -функционального распределения частиц по скоростям.
14. Степанов К. Н., Киценко А. Б. О возбуждении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме пучком заряженных частиц. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 167.
Приведены выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ в случае холодного потока и в случае потока с максвелловским распределением частиц по хаотическим скоростям; в этой работе приведены также выражения для скалярной проницаемости холодного и горячего потоков.
15. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О циклотронной неустойчивости в плазме. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 176.
Получены выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ при δ -функциональном распределении частиц по скоростям и при f_0 вида $f_0 \sim \delta(v_{\perp} - v_0) \times \exp(-v_{\parallel}^2/v_{\parallel 0}^2)$.
16. Михайловский А. Б. Диэлектрические свойства неоднородной плазмы. — «Ядерный синтез», 1962, т. 2, с. 162.
Приведены выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ при $\omega \ll \omega_B$ и произвольном $k_{\perp r}$ для случая максвелловской плазмы.
17. Михайловский А. Б. О диамагнитной неустойчивости плазмы при большом ларморовском радиусе попов. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 230.
Содержатся выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}$ при $\omega \ll \omega_B$ и произвольном $k_{\perp r}$ для случая анизотропного распределения частиц по скоростям.
18. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
Приводится тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ для горячей плазмы, получающийся из уравнений двухжидкостной гидродинамики с эффективным показателем адиабаты (задача § 3 из работы [18]).
19. Rosenbluth M. N., Post R. F. High-frequency electrostatic plasma instability inherent to «loss-cone» particle distributions. «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 547.
20. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. Возбуждение продольных колебаний в плазме с неизотропным распределением попов по скоростям. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1012.
21. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Возбуждение колебаний плазмы потоком осцилляторов. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 441.
В работах [19—21] содержатся выражения для скаляра и тензора диэлектрической проницаемости в приближении $\omega \gg \omega_B$.
22. Ахиезер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
23. Стикс Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
24. Рухадзе А. А., Силин В. П. Электродинамика сред с пространственной дисперсией. — «Успехи физ. наук», 1961, т. 74, с. 223.
В работах [18, 22—24] содержатся общие и различные предельные выражения для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле.

25. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
Содержится ряд полезных соотношений: интегралов от функций Бесселя, асимптотика последних и т. д.

ГЛАВА 6

ВЕТВИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 6.1. Колебания холодной плазмы

Целью настоящей главы является получение связанной картины потенциальных электростатических колебаний плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям, находящейся в магнитном поле.

Классификацию типов колебаний плазмы можно провести по-разному. Это зависит от того, для анализа какого круга явлений она предназначается. Одной из областей приложения теории колебаний плазмы является задача о распространении волны, возбуждаемых внешними источниками. При этом частота источника предполагается заданной величиной, а показатель преломления $N = ck/\omega$ — искомой. При такой постановке задачи дисперсионное уравнение $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ приходится разрешать относительно функции $N = N_{\alpha}(\omega)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому в задаче о распространении волн естественна классификация типов колебаний в соответствии с ветвями функции $N_{\alpha}(\omega)$.

Нас в дальнейшем будет интересовать задача об устойчивости плазмы: будем рассматривать возбуждение собственных колебаний плазмы с тем или иным значением волнового вектора \mathbf{k} . При этом дисперсионное уравнение разрешается относительно $\omega = \omega_{\alpha}(\mathbf{k})$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. При такой постановке задачи удобнее принять классификацию типов колебаний в соответствии с ветвями функции $\omega_{\alpha}(\mathbf{k})$. Это и будет предполагаться ниже.

Не все типы колебаний одинаково важны в задачах об устойчивости; наиболее существенными оказываются те, которые обладают фазовой скоростью, малой по сравнению со скоростью света (электростатические). Это обусловлено тем, что за некоторым исключением, лишь с такими колебаниями могут резонансно взаимодействовать частицы.

В этом параграфе мы рассмотрим колебания холодной плазмы, а затем учтем температуру частиц.

1. Электронные колебания. Согласно (5.3) и (1.35), электронные потенциальные колебания холодной покоящейся плазмы описываются дисперсионным уравнением

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta = 0. \quad (6.1)$$

Решение (6.1) имеет вид

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2 \pm [(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\}. \quad (6.2)$$

Зависимость $\omega_{1,2}$ от $\cos \theta$ представлена на рис. 6.1 (о частоте ω_3 см. п. 3). Частоты $\omega_{1,2}$ лежат в пределах:

$$\left. \begin{aligned} \max(\omega_{pe}^2, \omega_{Be}^2) &\leq \omega_1^2 \leq \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2; \\ \min(\omega_{pe}^2, \omega_{Be}^2) &\geq \omega_2^2 \geq \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2} (\cos^2 \theta)_{\min}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Значения слева соответствуют $\cos \theta \rightarrow 1$, а справа $\cos \theta \rightarrow 0$. С уменьшением $\cos \theta$ частота ω_2 формально стремится к нулю:

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2}. \quad (6.4)$$

Однако при слишком малых $\cos \theta$ в колебаниях ветви ω_2 существенную роль играют ионы, не учтенные в уравнении (6.1). Величина $(\cos \theta)_{\min}$ во втором уравнении

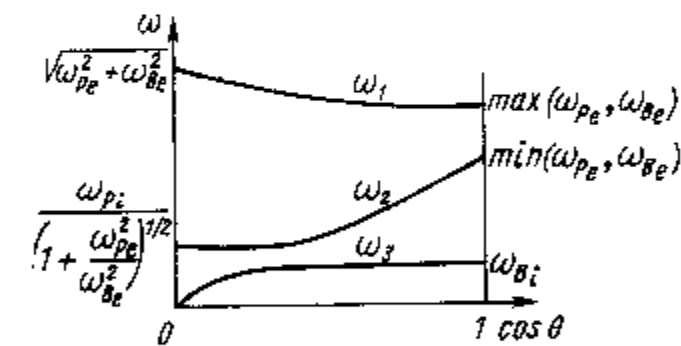


Рис. 6.1. Ветви колебаний холодной плазмы в магнитном поле при $\omega_{pe} > \omega_{Bi}$

(6.3) означает минимальное значение $\cos \theta$, при котором еще справедливо уравнение (6.1). Выражение для $(\cos \theta)_{\min}$ будет приведено в п. 2.

В предельных случаях больших и малых $(\omega_{pe}/\omega_{Be})^2$ частоты $\omega_{1,2}$ имеют вид:

при $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{Be}^2$

$$|\omega_{1,2}| = \left(\omega_{pe} + \frac{\omega_{Be}^2}{2\omega_{pe}} \sin^2 \theta; \omega_{Be} \cos \theta \right), \quad (6.5)$$

при $\omega_{pe}^2 \ll \omega_{Be}^2$

$$|\omega_{1,2}| = \left(\omega_{Be} + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{Be}} \sin^2 \theta; \omega_{pe} \cos \theta \right). \quad (6.6)$$

2. Влияние движения ионов на ветвь ω_2 . Для нахождения предела ω_2 при $\cos \theta \rightarrow 0$ в уравнении (6.1) необходимо учесть вклад ионов. Тогда вместо (6.1) из (5.3) и (1.35) следует

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0. \quad (6.7)$$

Здесь предположено, что $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$, $\cos^2 \theta \ll 1$. Согласно (6.7), уравнение (6.2) для ω_2 теряет силу при

$$\cos^2 \theta \leq \mu; \quad \mu \equiv m_e/m_i. \quad (6.8)$$

Частота колебаний этой ветви при условии (6.8) определяется выражением

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2}. \quad (6.9)$$

В плазме с $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$ эта частота равна гибридной — среднему геометрическому из электронной и ионной циклотронных частот:

$$|\omega_2| = |\omega_{Bi} \omega_{Be}|^{1/2}. \quad (6.10)$$

В менее плотной плазме, $\omega_{Bi} \ll \omega_{pe} \ll \omega_{Be}$, колебания ветви ω_2 имеют частоту, равную ионной ленгмюровской, $\omega_2 = \omega_{pi}$. Это — чисто ионные колебания. В плазме без магнитного поля колебания с $\omega \approx \omega_{Bi}$ возможны только при $T_e \gg T_i$ (см. § 2.5), тогда как при наличии магнитного поля последнее условие не обязательно.

3. Колебания с $\omega \ll \omega_{Bi}$. При $\omega \ll \omega_{Bi}$ дисперсионное уравнение колебаний холодной плазмы имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \sin^2 \theta = 0. \quad (6.11)$$

Отсюда видно, что наряду с ветвями $\omega_{1,2}$ имеется еще одна ветвь колебаний, которую обозначим ω_3 (см. также рис. 6.1).

При не слишком малых $\cos \theta$ и $\omega_{pe} \gg \omega_{Bi}$ ω_3 очень близко к циклотронной частоте ионов:

$$\left| \frac{\omega_3}{\omega_{Bi}} - 1 \right| \ll \mu^{1/2}. \quad (6.12)$$

В случае $\cos \theta \ll 1$ и $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ из (6.11) следует

$$\omega_3^2 = \frac{\omega_{Bi}^2}{1 + \mu / \cos^2 \theta}. \quad (6.13)$$

Видно, что ω_3 может заметно отличаться от ω_{Bi} только при $\cos \theta \ll \mu^{1/2}$. Если $\cos^2 \theta < \mu$, то, согласно (6.13), колебания ветви ω_3 оказываются низкочастотными не только по отношению к электронам, но и по отношению к ионам ($\omega_3 \ll \omega_{Bi}$):

$$\omega_3 = \omega_{Bi} \cos \theta (m_i/m_e)^{1/2}. \quad (6.14)$$

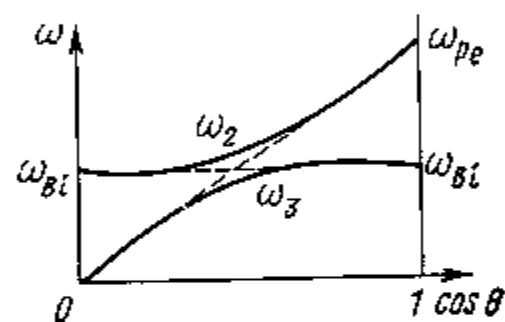


Рис. 6.2. Ветви колебаний ω_2, ω_3 в разреженной плазме ($\omega_{pi} < \omega_{Bi}$)

4. Колебания очень разреженной плазмы $\omega_{pi} \ll \omega_{Bi}$. В этом случае частоты ветвей ω_2 и ω_3 при $\cos^2 \theta \ll 1$ сравнимы. Из уравнения (6.11) в пренебрежении малым членом $(\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2) \sin^2 \theta$ находим

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_{Bi}^2 + \omega_{pi}^2 \sin^2 \theta + \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta \pm [(\omega_{Bi}^2 + \omega_{pi}^2 \sin^2 \theta + \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta)^2 - 4\omega_{pe}^2 \omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \}. \quad (6.15)$$

Частоты $\omega_{2,3}$, определяемые этим соотношением, представлены на рис. 6.2. Видно, что как при больших, так и при малых плотностях

$$\left. \begin{aligned} \omega_{Bi} &\ll |\omega_2| \ll \omega_{Be} \\ |\omega_3| &\ll \omega_{Bi} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Если плотность плазмы столь мала, что $\omega_{pe} < \omega_{Bi}$, то частота ветви ω_3 при всех $\cos \theta$ мала по сравнению с ионно-циклотронной:

$$|\omega_3| = \omega_{pe} \cos \theta < \omega_{Bi}. \quad (6.17)$$

Формально закон дисперсии для этой ветви такой же, как для ветви ω_2 в плазме с $\mu \ll \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 \ll 1$ и при не слишком малых $\cos \theta$.

§ 6.2. Колебания с частотами вблизи электронных циклотронных гармоник

При конечном отношении ларморовского радиуса электронов к поперечной длине волны, т. е. при $k_{\perp} \rho_e \neq 0$ полученная в предыдущем параграфе картина дополняется бесконечным числом ветвей колебаний, частоты которых лежат вблизи гармоник электронной циклотронной частоты (либо между гармониками). Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (5.24) $k_z = 0$ и пренебрежем в дисперсионном уравнении $\varepsilon_0 = 0$ вкладом ионов. Тогда последнее принимает вид

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - (n\omega_{Be})^2} \frac{2n^2 I_n(z_e) e^{-z_e}}{z_e} = 0. \quad (6.18)$$

В случае $\omega_{pe} \ll \omega_{Be}$ уравнение (6.18) имеет следующее приближенное решение:

$$\omega^2 = \omega_e^2(n, k_{\perp}) \equiv n^2 \left(\omega_{Be}^2 + \omega_{pe}^2 \frac{2I_n(z_e) \exp(-z_e)}{z_e} \right), \quad (6.19)$$

$n = 1, 2, \dots$

При $n = 1, z_e < 1$, отсюда следует выражение для частоты верхней ветви колебаний холодной плазмы [ср. с (6.2) при $\cos \theta = 0$]:

$$\omega_e^2(1, k) = \omega_{\perp}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2. \quad (6.20)$$

Частота коротковолновых колебаний, $z_e \gg n$, согласно уравнению (6.19) и асимптотической формуле $I_n \exp(-z) = (2\pi z)^{-1/2}$, равна

$$\omega_e(n, k) = n\omega_{Be} \times \left(1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi z_e}} \right). \quad (6.21)$$

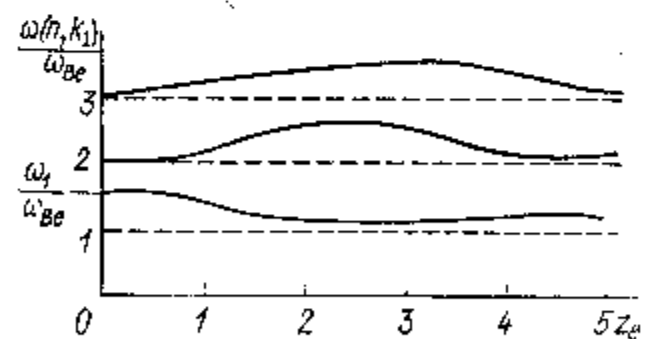


Рис. 6.3. Электронно-циклотронные гармоники в плазме низкой плотности

Ветви колебаний с частотами $\omega_e(n, k)$, определяемыми уравнением (6.19), представлены на рис. 6.3.

Аналогичная, но несколько более сложная картина ветвей колебаний получается при $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ [см., например, обзор Крауфорда].

Рассмотрим, при каких условиях электронные циклотронные колебания являются слабозатухающими. Условие экспоненциальной малости декремента колебаний имеет вид $|\omega - n\omega_{Be}| \gg k_z v_{Te}$. При характерном значении $k_{\perp} \simeq 1/\rho_e$, откуда получается

$$\cos \theta \ll 1, \quad (6.22)$$

т. е. волновой вектор должен быть почти (или строго) перпендикулярен к направлению магнитного поля.

§ 6.3. Ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания плазмы в магнитном поле

В приближении $\omega \ll k_z v_{Te}$ в плазме с $\mathbf{B}_0 \neq 0$ возможно существование двух новых ветвей колебаний, которые обозначим $\omega_4(\mathbf{k})$, $\omega_5(\mathbf{k})$. Используя для $\epsilon_0^{(e)}$ выражение (5.24), а для $\epsilon_0^{(i)}$ — (5.3), получаем дисперсионное уравнение при $\omega \ll k_z v_{Te}$ и $T_i \rightarrow 0$. (В выражении (5.24) разлагаем $W(\omega/k_z v_{Te})$ в ряд по малому аргументу.) Мнимые члены дисперсионного уравнения порядка $\omega/k_z v_{Te} \ll 1$. Уравнение для вещественной части частоты имеет вид

$$\operatorname{Re} \epsilon_0(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} = 0. \quad (6.23)$$

Отсюда для возмущений с $k^2 d_e^2 \ll 1$ находим

$$\omega_{4,5}^2 = \frac{1}{2} [\omega_{Bi}^2 + k^2 V_s^2 \pm \sqrt{(\omega_{Bi}^2 + k^2 V_s^2)^2 - 4k_z^2 V_s^2 \omega_{Bi}^2}]. \quad (6.24)$$

Здесь $V_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ — скорость распространения ионно-звуковых колебаний в отсутствие магнитного поля [ср. с. (2.65)].

Обсудим смысл решений (6.24) и пределы применимости этих выражений. Если наряду с условиями неизотермичности плазмы $T_e \gg T_i$ и условием $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ выполняется также неравенство

$$k^2 V_s^2 \gg \omega_{Bi}^2, \quad (6.25)$$

то решение $\omega = \omega_4(\mathbf{k})$ соответствует высокочастотным колебаниям ($\omega \gg \omega_{Bi}$) и совпадает с (2.65). В этом предельном случае частота ветви ω_4 вовсе не зависит от магнитного поля. Специфика магнитного поля проявляется, однако, в характере затухания колебаний. Согласно формуле (2.17), затухание колебаний определяется мнимой частью выражения для ϵ_0 , которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\operatorname{Im} \epsilon_0 = \frac{\sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te}} \frac{1}{(k d_e)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z_e) \exp \left[-z_e - \left(\frac{\omega - n\omega_{Be}}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right]. \quad (6.26)$$

Отсюда видно что, в отличие от ионно-звуковых колебаний при $\mathbf{B}_0 = 0$ декремент колебаний ветви ω_4 существенно зависит от магнитного поля. Эта зависимость становится слабой только при $z_e \gg 1$, $k_z v_{Te} \gg \omega_{Be}$. В этом предельном случае ряд (6.26) можно просуммировать и конечный результат оказывается независимым от \mathbf{B}_0 .

Колебания ветви ω_4 при условии (6.25) назовем высокочастотными ионно-звуковыми. При еще больших k , $k^2 d_e^2 \gg 1$, ветвь ω_4 представляет собой ионные ленгмюровские колебания, обсуждавшиеся в § 2.5.

С уменьшением волнового числа до значений порядка

$$k^2 V_s^2 \leq \omega_{Bi}^2 \quad (6.27)$$

частота ветви ω_4 убывает и становится порядка ионно-циклотронной (рис. 6.4).

При выполнении сильного неравенства (6.27) частота колебаний ветви ω_4 стремится к ионно-циклотронной. Частота ветви ω_5 в этом случае определяется соотношением

$$\omega_5 = k_z V_s. \quad (6.28)$$

В обратном предельном случае больших k [условие (6.25)]

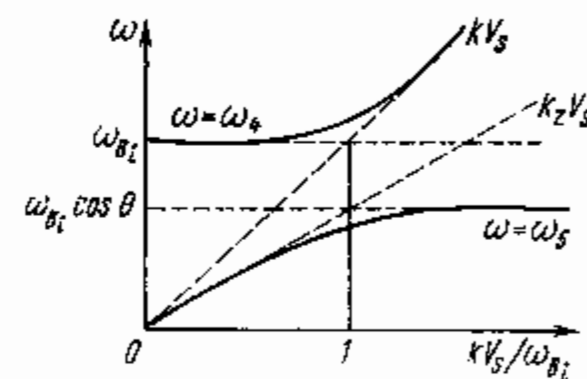


Рис. 6.4. Высокочастотные ионно-звуковые, $\omega = \omega_4$, и низкочастотные ионно-звуковые колебания, $\omega = \omega_5$

частота колебаний ветви ω_5 приближенно равна

$$\omega_5 = \omega_{Bi} \cos \theta. \quad (6.29)$$

В отличие от (2.49) колебания типа (6.28) назовем низкочастотными ионно-звуковыми.

В приближении низкочастотных колебаний, $\omega \ll \omega_{Bi}$, уравнения (6.23) и (6.26) сводятся к следующему:

$$1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) + \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega_{Bi}^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} = 0. \quad (6.30)$$

Отсюда находим поправки к (6.28), обусловленные тем, что параметры $(kd_e)^2$, $(k_{\perp} V_s)^2$ и $\omega/k_z v_{Te}$ конечны:

$$\omega^2 = (k_z V_s)^2 \left(1 + k^2 d_e^2 + k_{\perp}^2 V_s^2 / \omega_{Bi}^2 \right)^{-1}; \quad (6.31)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \mu^{1/2} \frac{\omega^2}{|k_z| V_s} \left(1 + k^2 d_e^2 + \frac{k_{\perp}^2 V_s^2}{\omega_{Bi}^2} \right)^{-1}. \quad (6.32)$$

Рассмотрим соответствие между ветвями ω_2 и ω_4 при $\cos^2 \theta \ll \mu$. С уменьшением $\cos \theta$ отношение $\omega/k_z v_{Te}$ для ветви ω_4 [см. уравнение (2.60)] растет и при $\cos \theta \simeq \mu^{1/2}$ становится порядка единицы. В этих условиях колебания описываются дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} x I_0(z_e) \exp(-z_e) W(x) \right] - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0, \quad (6.33)$$

$$x \equiv \omega / |k_z| v_{Te}.$$

В предельном случае $\omega \gg k_z v_{Te}$ из (6.33) следует:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{1 - I_0 \exp(-z_e)}{z_e} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} I_0 \exp(-z_e) \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0. \quad (6.34)$$

Если в (6.34) положить $z_e \ll 1$, то оно сведется к уравнению (6.7) для ветви ω_2 . Поэтому колебания, описываемые уравнением (6.34), можно рассматривать как продолжение ветви ω_2 на область более коротких волн, $z_e \gtrsim 1$. При произвольных z_e решение (6.34) имеет вид:

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 I_0 \exp(-z_e) \cos^2 \theta}{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{1 - I_0 \exp(-z_e)}{z_e}}. \quad (6.35)$$

На рис. 6.5 представлена зависимость $\omega_2 = \omega_2(k)$ при $\cos \theta = 0$ в плазме с $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$. В указанных условиях и при $z_e \ll 1$ частота колебаний равна гибридной (6.10). При больших волновых числах, лежащих в пределах

$$\rho_e^{-1} < k < d_e^{-1}, \quad (6.36)$$

частота ветви ω_2 , согласно (6.35), оказывается такой же, как и для высокочастотной ионно-звуковой.

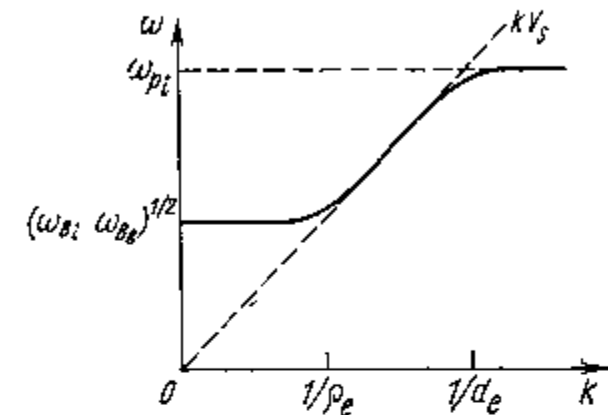


Рис. 6.5. Соответствие между ветвями ω_2 и ω_4 при малых $\cos \theta$

§ 6.4. Ионно-циклотронные и электронно-звуковые колебания

1. Ионно-циклотронные колебания при $k_z = 0$.

При $\omega \ll \omega_{Be}$, $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, $k_z = 0$ и $k_{\perp} \rho_i \neq 0$ дисперсионное уравнение (1.35) с ϵ_0 вида (7.18) сводится к следующему:

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_i) \exp(-z_i)}{\omega - n\omega_{Bi}} \right) = 0. \quad (6.37)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением для электронно-циклотронных колебаний (6.18).

Графическое изображение ветвей ионно-циклотронных колебаний в частном случае $\omega_{pi} \ll \omega_{Bi}$ повторяет рис. 6.3 с заменой ω_1 на ω_2 , где ω_2 определено равенством (6.15).

2. Низкочастотные электронно-звуковые колебания. В пределе холодных ионов колебания низкочастотной части ветви ω_3 (см. рис. 6.1) описываются формулой (6.14). При учете конечности ларморовского радиуса ионов, $z_i \neq 0$, вместо (6.11) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \frac{1 - I_0(z_i) \exp(-z_i)}{z_i} = 0. \quad (6.38)$$

Это уравнение вытекает из (6.30) в предположениях $z_e \ll 1$, $(k_z v_{Te}, k_z v_{Ti}) \ll \omega \ll \omega_{Bi}$. Из (6.38) находим

$$\omega^2 = k_z^2 \frac{T_i}{m_e} \frac{1}{1 + k^2 d_i^2 - I_0(z_i) \exp(-z_i)}. \quad (6.39)$$

В пределе $z_i \gg 1$ и $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$ частота этих колебаний равна

$$\omega = \omega_0 \equiv k_z (T_i/m_e)^{1/2}. \quad (6.40)$$

Этот результат отличается от результата для частоты низкочастотных ионно-звуковых колебаний (6.28) только переобозначением индексов ионов и электронов. В связи с этим колебания типа (6.40) будем называть низкочастотными электронно-звуковыми. Ограничение на область углов между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , накладываемое условием низкочастотности $\omega \ll \omega_{Bi}$, для этих колебаний имеет вид

$$\cos \theta < (\mu/z_i)^{1/2}. \quad (6.41)$$

Так же как и в случае ионно-звуковых колебаний, необходимым условием существования ветви (6.40) является неизотермичность плазмы. Соотношение между температурами ионов и электронов должно быть, однако, обратным, чем в случае ионно-звуковых колебаний (более горячими должны быть ионы):

$$T_i \gg T_e. \quad (6.42)$$

В противном случае, как следует из (6.40), будет нарушено условие $\omega \gg k_z v_{Te}$.

В разреженной плазме, $\omega_{pi} \ll \omega_{Bi}$, закон дисперсии коротковолновых колебаний, $z_i \gg 1$, согласно (6.38), имеет такой же вид, как и в случае $z_i \ll 1$, и определяется формулой (6.17) для замагниченных ленгмюровских колебаний. Это связано с тем, что при столь низких плотностях вклад ионов в диэлектрическую проницаемость пренебрежимо мал при всех z_i .

3. Электронно-звуковые и ионно-циклотронные колебания при $1 \gg \cos \theta \gg \sqrt{\mu/z_i}$. При $\cos \theta > \sqrt{\mu/z_i}$ частота электронно-звуковых колебаний становится сравнимой с ω_{Bi} , вследствие чего простой закон дисперсии (6.40) существенно искажается циклотронными эффектами. При

этом дисперсионное уравнение, согласно (5.24), имеет вид:

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{k^2 d_i^2} \left(1 - \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{\omega - n\omega_{Bi}} \right) = 0. \quad (6.43)$$

Пользуясь численной малостью функций $I_n(z_i) \exp(-z_i)$ с индексами $n \neq 0$, находим, что закон дисперсии колебаний с частотами, не слишком близкими к циклотронным гармоникам, как и в случае $\omega \ll \omega_{Bi}$, определяется уравнением (6.39). С другой стороны, если k_z таково, что правая часть уравнения (6.39) не близка к $(n\omega_{Bi})^2$, то частота циклотронных колебаний

$$\omega = n\omega_{Bi} \left\{ 1 + I_n(z_i) \exp(-z_i) \left[1 - I_0 \exp(-z_i) + k^2 d_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{n^2 \omega_{Bi}^2} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (6.44)$$

Уравнения (6.39) и (6.44) теряют силу, если частота электронно-звуковых колебаний приближенно равна $n\omega_{Bi}$. Это имеет место при

$$\cos \theta \approx \cos \theta_0 \equiv n \sqrt{\mu/z_i} \left[1 - I_0(z_i) \exp(-z_i) + k^2 d_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.45)$$

Приближенное решение уравнения (6.43) при $\cos \theta \approx \cos \theta_0$ можно найти таким же путем, как и решение дисперсионного уравнения (1.46) в задаче о резонансной пучковой неустойчивости (см. п. 2, § 1.5). В результате получается картина ветвей колебаний, представленная на рис. 6.6. Видно, что ветви, соответствующие электронно-звуковым колебаниям, с увеличением $\cos \theta$ переходят в циклотронные и, наоборот, ветви, соответствующие при $\cos \theta < \cos \theta_0$ циклотронным колебаниям, становятся электронно-звуковыми.

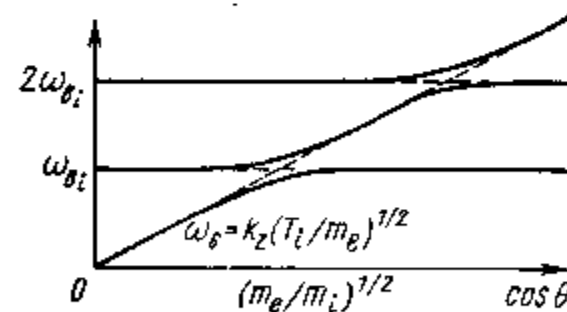


Рис. 6.6. Электронно-циклотронные и ионно-циклотронные колебания

4. **Электронно-звуковые колебания при $\omega \gg \omega_{Bi}$.** При $\omega \gg \omega_{Bi}$ частотные интервалы, в которых претерпевает изменение закон дисперсии электронно-звуковых колебаний, становятся весьма малыми. Если отвлечься от этих узких интервалов, то поведение ионов в поле колебаний окажется таким же, как и при $B_0 = 0$. Это соответствует высокочастотному приближению, обсуждавшемуся в § 5.5. Диэлектрическая проницаемость ионов в этом приближении определяется уравнением (5.35), в котором следует положить $\omega \ll kv_{Ti}$. В этом высокочастотном пределе электронно-звуковые колебания описываются дисперсионным уравнением:

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{k^2 d_i^2} = 0. \quad (6.46)$$

Частота колебаний

$$\omega = \omega_0 \equiv k_z (T_i/m_e)^{1/2} (1 + k^2 d_i^2 + k^2 \rho_i^2 \mu)^{-1/2}. \quad (6.47)$$

При конечных $k_\perp \rho_e$ вместо (6.47) с помощью (5.29) и (5.35) получаем

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 T_e}{m_e} \left[3 + \frac{I_0(z_e) \exp(-z_e)}{1 - I_0(z_e) \exp(-z_e) - \tau^{-1} + k^2 d_e^2} \right], \quad (6.48)$$

$$\tau = T_i/T_e.$$

Здесь учтены также малые члены порядка $(k_z v_{Te}/\omega)^2$.

Этот результат удовлетворяет исходному предположению $\omega \gg k_z v_{Te}$, если только z_e велико:

$$z_e \ll 1. \quad (6.49)$$

При больших z_e электронно-звуковые колебания сильно затухают, $\text{Im } \omega \approx \text{Re } \omega$.

5. **Ионно-циклотронные колебания в плазме с конечной температурой электронов.** При конечном значении параметра $k_z v_{Te}/\omega$ вместо дисперсионного уравнения (6.18) имеем (для $z_i \ll 1$)

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{1}{k^2 d_e^2} [1 + i \sqrt{\pi} x W(x)] + \frac{1}{k^2 d_i^2} \left[1 - \omega \sum \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{\omega - n\omega_{Bi}} \right] = 0, \quad (6.50)$$

где $x = \omega / |k_z| v_{Te}$. Отсюда следует, что в плазме с $T_e \gg T_i$ колебания типа электронно-звуковых сильно затухают. Для ионно-циклотронных ветвей колебания из (6.50) получаем

$$\omega = n\omega_{Bi} \left\{ 1 + \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{1 - I_0 \exp(-z_i) + k^2 d_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right) + \tau (1 + i \sqrt{\pi} x_n W(x_n))} \right\}^{-1}, \quad (6.51)$$

$$x_n = n\omega_{Bi} / |k_z| v_{Te}.$$

В предельном случае $k_z v_{Te} \gg n\omega_{Bi}$ частота колебаний (6.51) почти вещественна, причем

$$\text{Re } \omega = n\omega_{Bi} \left[1 + \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{1 + \tau + k^2 d_i^2 - I_0(z_i) \exp(-z_i)} \right]. \quad (6.52)$$

При $z_i \ll 1$ и $n = 1$ эти колебания соответствуют левому участку ветви ω_4 на рис. 6.4.

Условие малости ионно-циклотронного затухания колебаний типа (6.52) приводит к ограничению на область углов между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , при которых эти колебания существуют:

$$\cos \theta < \frac{n}{\sqrt{z_i}} \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{1 + \tau + k^2 d_i^2 - I_0(z_i) \exp(-z_i)}. \quad (6.53)$$

При вычислении декремента колебаний в уравнении (6.50) необходимо учесть конечность параметра $k_z v_{Te}/(\omega - n\omega_{Bi})$. С учетом этих членов и в предположении, что $\omega \approx n\omega_{Bi}$, $\omega \ll k_z v_{Te}$ и $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$, диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\text{Re } \epsilon_0 = \frac{1}{(kd_i)^2} \left[1 + \tau - I_0 \exp(-z_i) - \frac{n\omega_{Bi}}{\Delta} I_n \exp(-z_i) \times \left(1 + \frac{k_i^2 T_i}{m_i \Delta^2} \right) \right]; \quad (6.54)$$

$$\text{Im } \epsilon_0 = \frac{\sqrt{\pi} \omega}{k^2 d_e^2 |k_z| v_{Te}} \left[1 + \mu^{-1/2} \tau^{-3/2} I_n \exp(-z_i) \times \exp\left(-\frac{\Delta^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}\right) \right], \quad (6.55)$$

где $\Delta = \omega - n\omega_{Bi}$. С помощью (6.54), (6.55) и (2.17) находим

$$\gamma_n = -\frac{\Delta_0^2 \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \tau \left[1 + \mu^{-1/2} \tau^{-3/2} I_n \exp(-z_i) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-1 - \frac{\Delta^2}{k^2 v_{Ti}^2}\right) \right], \quad (6.56)$$

где Δ_0 — это Δ , вычисленное без учета тепловых поправок в (6.54) [т. е. $\Delta_0 = \text{Re } \omega - n\omega_{Bi}$ при $\text{Re } \omega$, определяемом соотношением (6.52)].

Библиографический обзор к гл. 6

1. Ахнезер А. И., Паргаманик Л. Э. Свободные колебания электронной плазмы в магнитном поле.—«Труды физ.-мат. фак-та Харьковск. ун.-та», 1948, т. 27, с. 75.
Рассмотрены электронные колебания холодной плазмы (§ 6.1).
2. Gross E. P. Plasma oscillations in a static magnetic field.—«Phys. Rev.», 1951, v. 82, p. 232.
Исследуются электронные возмущения при $k_z = 0$, $k_{\perp} \rho_e \ll 1$ с учетом членов порядка $(k_{\perp} \rho_e)^2$ (§ 6.2).
3. Гордеев Г. В. Колебания плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1952, т. 23, с. 660.
Исследуются электронные возмущения с учетом теплового движения.
4. Ситенко А. Г., Степанов К. Н. О колебаниях электроной плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 31, с. 642.
Исследуется влияние теплового движения на электронные колебания.
5. Брагинский С. И. О типах колебаний плазмы в магнитном поле.—«Доклады АН СССР», 1957, т. 115, с. 475.
В рамках модели двухжидкостной гидродинамики с эффективным показателем адиабаты получено дисперсионное уравнение, с помощью которого для ряда предельных случаев найдена зависимость $\omega = \omega_{\alpha}(k)$, $\alpha = 1, 2, \dots$. Дана классификация типов колебаний плазмы в магнитном поле, в основе которой лежит сопоставление типов колебаний набору дисперсионных ветвей $\omega = \omega_{\alpha}(k)$.
6. Bernstein I. B. Waves in a plasma in a magnetic field.—«Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 10.
Прямим вычислением показано, что потенциальные возмущения максвелловской плазмы не могут нарастать во времени. Рассматривается затухание потенциальных возмущений ветвей ω_1, ω_2 . Получено и исследовано дисперсионное уравнение для низкочастотных ионно-звуковых колебаний (§ 6.3).
7. Степанов К. Н. Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, с. 1155.

- Получено дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний ветви ω_2 при $\cos \theta < (m_e/m_i)^{1/2}$ (§ 6.1).
Исследуется кинетическое затухание потенциальных электроно-ионных колебаний (§ 6.1, 6.3, 6.4).
8. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. О дисперсионном уравнении для необыкновенной волны, распространяющейся в плазме поперек внешнего магнитного поля.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 41, с. 1527. Исследуются электронные возмущения с $k_z = 0$ (§ 6.2).
 9. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. Anomalous diffusion arising from microinstabilities in plasma.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 1507.
 10. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Возбуждение низкочастотных продольных колебаний плазмы в магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1823.
В работах [9, 10] исследуются ионно-циклотронные колебания. Учитывается конечность T_e и T_i (§ 6.3 и 6.4). В работе [10] исследуются также ионно-звуковые ветви колебаний (§ 6.3).
 11. Михайловский А. Б. Электропная температурная неустойчивость неоднородной плазмы.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1365.
Обсуждаются электроно-звуковые колебания.
 12. Crawford F. W. A review of cyclotron harmonic phenomena in plasmas.—«Nucl. Fusion», 1965, v. 5, p. 73.
Дан обзор по колебаниям с частотами, лежащими вблизи электроно-циклотронных гармоник.
 13. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме.— В сб: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
 14. Ахнезер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
 15. Стикс Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
 16. Рухадзе А. А., Сялип В. П. Электродинамика сред с пространственной дисперсией.—«Успехи физ. наук», 1961, т. 74, с. 223.
В работах [13—16] можно найти более широкое обсуждение вопросов теории колебаний плазмы в магнитном поле, чем в настоящей главе.
 17. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Исследование спектров ионно-циклотронных колебаний плазмы.—«Укр. физ. журн.», 1971, т. 16, с. 469.
 18. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Исследование дисперсии циклотронных волн в плазме.—«Журн. техн. физ.», 1972, т. 42, с. 243.
 19. Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г. Спектры потенциальных ионно-циклотронных колебаний плазмы.—«Журн. техн. физ.», 1972, т. 42, с. 1994.
В работах [17—19] проводится численный анализ ветвей колебаний плазмы с частотами, лежащими вблизи электроных и ионно-циклотронных гармоник.

ГЛАВА 7
ПЛАЗМА С ПРОДОЛЬНЫМИ
ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ

§ 7.1. Холодные плазма и пучок
при $\omega_{pe} > \omega_{Be}$

В приближении $\mathbf{V}_0 = 0$ было показано, что в плазме, состоящей из холодных потоков, может развиваться гидродинамическая пучковая неустойчивость, см. § 1.5. Полученные в этом приближении результаты остаются в силе и при $\mathbf{V}_0 \neq 0$, если $k_z \gg k_\perp$ (предполагается, что $\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}_0$) либо если $\gamma > \omega_B$. Если ни одно из этих условий не выполнено, то необходимо учитывать влияние магнитного поля на движение частиц.

Дисперсионное уравнение для системы холодных потоков, находящихся в магнитном поле, можно получить, используя выражение для скалярной диэлектрической проницаемости потока (5.2) и формулу (1.35):

$$1 - \sum \omega_p^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{(\omega - k_z V)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(\omega - k_z V)^2 - \omega_B^2} \right] = 0, \quad (7.1)$$

где суммирование производится по потокам.

Рассмотрим влияние магнитного поля на пучковую неустойчивость, развивающуюся при прохождении пучка малой плотности через покоящуюся плазму, предполагая магнитное поле не слишком большим $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$. В этом случае уравнение (7.1) удобно представить в виде

$$\epsilon_0^{(0)} + \epsilon_0^{(1)} = 0. \quad (7.2)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0^{(0)} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_p^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_B^2}; \\ \epsilon_0^{(1)} &= -\frac{\alpha \omega_p^2 \cos^2 \theta}{(\omega - k_z V)^2} - \frac{\alpha \omega_p^2 \sin^2 \theta}{(\omega - k_z V)^2 - \omega_B^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

$\alpha = n_1/n_0$; V — скорость пучка, ω_p — ленгмюровская частота покоящейся плазмы.

В нулевом приближении по α уравнение (7.2) описывает собственные колебания покоящейся плазмы с частота-

ми (6.2) и сносные колебания пучка с

$$\omega = k_z V + n\omega_B, \quad n = 0, \pm 1. \quad (7.4)$$

Корни уравнения (7.2), получающиеся в этом приближении, изображены на рис. 7.1. Двойная линия $\omega = k_z V$ на этом рисунке соответствует двум совпадающим корням. Ветви типа $\omega = k_z V$ будем называть черенковскими, $\omega = k_z V \pm \omega_B$ — циклотронными.

При конечных α вместо рис. 7.1 из уравнения (7.2) следует картина ветвей, изображенная на рис. 7.2. Она

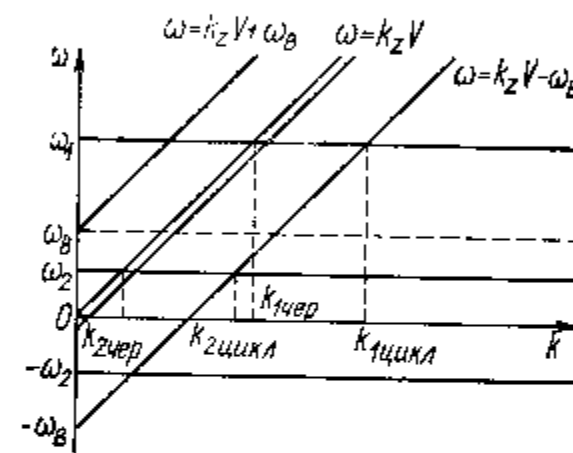


Рис. 7.1. Ветви колебаний плазмы и пучка в приближении $\alpha \rightarrow 0$

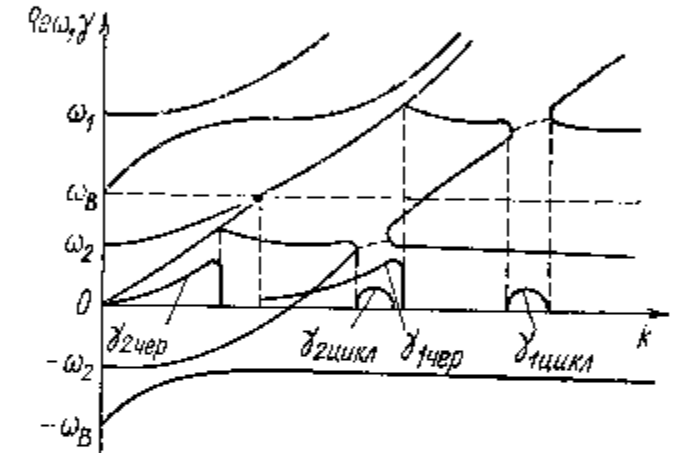


Рис. 7.2. Ветви колебаний плазмы и пучка при конечном α

вытекает из последующего рассмотрения. Как и при $\mathbf{V}_0 = 0$ (см. п. 2, § 1.5) частоты колебаний при учете конечности α оказываются, вообще говоря, комплексными. На рис. 7.2 отложены вещественная и мнимая части ω (ср. с рис. 1.1).

1. Неустойчивость черенковских сносных колебаний. Частоты сносных ветвей (7.4) с $n = 0$ при конечных α [ср. с (1.47)]:

$$\omega = k_z V \pm \frac{\alpha^{1/2} \omega_p |\cos \theta|}{(\sqrt{\epsilon_0^{(0)}}(k, \omega, \omega - k_z V))}. \quad (7.5)$$

Согласно (7.3), величина $\epsilon_0^{(0)}(k, \omega)$ отрицательна, если ω лежит в одном из интервалов:

$$0 < \omega < \omega_2; \quad \omega_B < \omega < \omega_1, \quad (7.6)$$

где $\omega_{1,2}$ определены соотношением (6.2). Отсюда следует, что решения (7.5) комплексны при k_z , удовлетворяющих одному из следующих условий (см. рис. 7.2):

$$\left. \begin{aligned} \omega_B/V < k_z < \omega_1/V; \\ 0 < k_z < \omega_2/V. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

При таких k_z инкремент колебаний (7.5) равен

$$\gamma = \frac{\alpha^{1/2} \omega_p |\cos \theta|}{(V - \varepsilon_0^{(0)})_{\omega=k_z V}}. \quad (7.8)$$

Максимальный инкремент достигается на верхних границах интервалов (7.7), соответствующих «пересечению» спосовых ветвей $\omega = k_z V$ с ветвями собственных колебаний плазмы $\omega_{1,2}$ (см. рис. 7.1), т. е. при

$$k_z = k_{z1,2} \equiv \omega_{1,2}/V. \quad (7.9)$$

При таких k_z $\varepsilon_0^{(0)} = 0$, вследствие чего уравнение (7.5) неприменимо. Следуя методу п.2 § 1.5, находим, что максимальный инкремент равен

$$\gamma_{1,2 \text{ макс}} = \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha^{1/3} \left(\frac{\omega_p^2 \cos^2 \theta}{\partial \varepsilon_0^{(0)}/\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_{1,2}}^{1/3}. \quad (7.10)$$

В предельном случае $\omega_p \gg \omega_B$ из (7.9) и (7.10) следует

$$k_{z1,2} = \left(\frac{\omega_p}{V}, \frac{\omega_B \cos \theta}{V} \right); \quad (7.11)$$

$$\gamma_{1,2 \text{ макс}} = \frac{V\sqrt{3}}{2^{4/3}} \alpha^{1/3} \omega_p \left((\cos \theta)^{2/3}, \frac{\omega_B}{\omega_p} \cos \theta (\sin \theta)^{2/3} \right). \quad (7.12)$$

Вещественная часть выражения для частоты приближенно совпадает с (7.5) (без учета членов порядка $\alpha^{1/3}$).

Величина $\gamma_{1 \text{ макс}}$ отличается от полученного в приближении $\mathbf{B}_0 = 0$ выражения (1.52) множителем $(\cos \theta)^{2/3}$. Это объясняется тем, что при выводе (7.10) пренебрегалось вкладом последнего члена правой части первого равенства (7.3). При $\sin \theta \simeq \cos \theta$ это пренебрежение оправдано, если $\gamma_{1 \text{ макс}} \ll \omega_B$, т. е. при

$$\omega_B/\omega_p > \alpha^{1/3}. \quad (7.13)$$

2. Неустойчивость при пересечении циклотронных спосовых ветвей пучка с ветвями собственных колебаний плазмы. Циклотронные спосовые ветви колебаний [см. формулу (7.4) с $n \neq 0$] не раскачиваются и не затухают, $\text{Im } \omega = 0$, если их частота не близка к $\omega_{1,2}$ (см. рис. 7.1). Предположим теперь

$$k_z V \pm \omega_B = \omega_{1,2}. \quad (7.14)$$

В этом случае учет конечности α в уравнении (7.2) приводит к следующему уравнению для поправки $\delta\omega$ к частотам пересекающихся ветвей:

$$(\delta\omega_{1,2}^{\pm})^2 = \pm \frac{\alpha \omega_p^2 \sin^2 \theta}{2\omega_B (\partial \varepsilon_0^{(0)}/\partial \omega)_{\omega=\omega_{1,2}}}. \quad (7.15)$$

Индексы 1, 2 и (\pm) означают номера пересекающихся ветвей. Ниже будем предполагать $\omega_{1,2} > 0$, $\omega_B > 0$.

Из (7.15) следует, что при пересечении ветвей $\omega_{1,2}$ с ветвью $\omega = k_z V + \omega_B$ (нормальный эффект Доплера) добавка вещественна (см. рис. 7.2). Неустойчивость имеет место только при $\omega_{1,2} = k_z V - \omega_B$ (аномальный эффект Доплера, см. рис. 7.2). Волновое число и инкремент возбуждаемых колебаний определяются соотношениями:

$$k_{z1,2} = (\omega_B + \omega_{1,2})/V; \quad (7.16)$$

$$\gamma_{1,2} = \alpha^{1/2} \omega_p \sin \theta \left(\frac{1}{2\omega_B \partial \varepsilon_0^{(0)}/\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_{1,2}}^{1/2}. \quad (7.17)$$

При $\omega_p^2 \gg \omega_B^2$ из (7.16) и (7.17) следует:

$$k_{z1,2} \simeq \left(\frac{\omega_p}{V}, \frac{\omega_B (1 \pm |\cos \theta|)}{V} \right); \quad (7.18)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{\alpha^{1/2}}{2} \omega_p \sin \theta \left\{ \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2}, \frac{\omega_B}{\omega_p} (\cos \theta)^{1/2} \sin \theta \right\}. \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) для γ_1 справедливо, если ω_B/ω_p ограничено снизу условием (7.13); так что $\gamma_1 < (\gamma_{B_0=0})_{\text{макс}}$.

Сравним найденные выше условия неустойчивости и инкременты колебаний со случаем $\mathbf{B}_0 = 0$ (см. п. 2, § 1.5). В отличие от случая $\mathbf{B}_0 = 0$, где неустойчивость имеет место, если $\omega \approx k_z V$, при $\mathbf{B}_0 \neq 0$ возможны два типа резонансов: $\omega = k_z V$ (черенковский) и $\omega = k_z V -$

— ω_B (циклотронный). Отличие от случая $B_0 = 0$ состоит в том, что могут раскачиваться не одна, а две ветви собственных колебаний.

Черенковский и циклотронный инкременты не превосходят $\gamma_{B_0=0}$. Наибольшим при $B_0 \neq 0$ является черенковский инкремент, который, как и $\gamma_{B_0=0}$, пропорционален $\alpha^{1/3}$.

§ 7.2. Холодные плазма и пучок в сильном магнитном поле

Исследуем неустойчивости плазмы и пучка, находящихся в сильном магнитном поле, $\omega_B \gg \omega_p$. Наличие малого параметра ω_p/ω_B существенно упрощает эту задачу. Благодаря этому удается сравнительно просто проанализировать не только случай пучка малой плотности, $\alpha \equiv n_1/n_0 \ll 1$, но и случай $\alpha \simeq 1$.

Возмущения системы плазма — пучок описываются уравнениями (7.2) и (7.3). Эти уравнения учитывают четыре типа взаимодействия плазмы с пучком, проанализированные в § 7.1 при $\omega_p > \omega_B$. Рассмотрим теперь каждое из этих элементарных взаимодействий при $\omega_B \gg \omega_p$.

1. Черенков-черенковское взаимодействие. При $\omega_B \gg \omega_p$ можно выделить класс низкочастотных длинноволновых возмущений, $(\omega, k_z V) \ll \omega_B$. Для таких возмущений из (7.2) и (7.3) следует:

$$1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \cos \theta \right)^2 - \alpha \frac{(\omega_p \cos \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2} = 0. \quad (7.20)$$

Уравнение (7.20) формально отличается от (1.46) тем, что здесь вместо ω_p стоит $\omega_p \cos \theta$. Благодаря этому при анализе (7.20) можно воспользоваться результатами § 1.5, где рассматривалась пучковая неустойчивость при $B_0 = 0$.

Отсюда находим, что возмущения раскачиваются, если

$$k \leq \frac{\omega_p}{V} (1 + \alpha^{1/3})^{3/2}. \quad (7.21)$$

Здесь $k \equiv (k_1^2 + k_z^2)^{1/2}$ — полное волновое число. Интервал частот нарастающих возмущений ограничен сверху условием

$$\omega \leq k_z V / (1 + \alpha^{1/3}). \quad (7.22)$$

В частных случаях $\alpha = 1$ и $\alpha \ll 1$ нетрудно вычислить инкремент возмущений. При $\alpha = 1$ это можно сделать

так же, как и в п. 1 § 1.5, где относительная скорость потоков предполагалась равной $2V$, а система отсчета была выбрана при условии, что средняя скорость частиц равна нулю. Поэтому при использовании здесь результатов п. 1 § 1.5, необходимо сделать замены $\omega_p \rightarrow \omega_p \cos \theta$, $\omega \rightarrow \omega + k_z V/2$, $V \rightarrow V/2$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \frac{k_z \text{ опт } V}{2 \sqrt{3}}; \\ \text{Re } \omega &= k_z \text{ опт } V/2; \\ k_z \text{ опт} &= \sqrt{3} \omega_p \cos \theta / V. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Если $\alpha \ll 1$, то, следуя п. 2 § 1.5, находим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \sqrt{3} k_z \text{ опт } V / 2^{4/3}; \\ \text{Re } \omega &\approx k_z \text{ опт } V; \\ k_z \text{ опт} &= \omega_p \cos \theta / V. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

2. Циклотронно-циклотронное взаимодействие. В отсутствие пучка частота ветви ω_1 при $\omega_B \gg \omega_p$ близка к циклотронной, $\omega_1 \approx \omega_B$. Циклотронное взаимодействие пучка с этой ветвью имеет место при $k_z V = \omega_B + \omega_1 \approx 2\omega_B$. Учитывая это, из (7.2) и (7.3) получаем приближенно

$$1 - \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{2\omega_B (\omega - \omega_B)} + \frac{\alpha (\omega_p \sin \theta)^2}{2\omega_B (\omega - k_z V + \omega_B)} = 0. \quad (7.25)$$

Решения (7.25) комплексны, если k_z лежит в интервале $k_{z \text{ мин}} < k_z < k_{z \text{ макс}}$, где

$$k_{z \text{ макс, мин}} = \frac{2\omega_B}{V} \left[1 + \left(\frac{\omega_p \sin \theta}{2\omega_B} \right)^2 (1 + \alpha \pm \sqrt{\alpha}) \right]. \quad (7.26)$$

Максимальный инкремент равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{\omega_B}. \quad (7.27)$$

3. Черенков-циклотронное взаимодействие. Теперь рассмотрим возмущения, для которых

$$\left. \begin{aligned} |\omega| &\ll \omega_B, \\ |\omega - k_z V + \omega_B| &\ll \omega_B. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

В этом случае $k_z \approx \omega_B/V$. Тогда (7.2) и (7.3) можно свести к следующему уравнению:

$$1 - \left(\frac{\omega_p \cos \theta}{\omega} \right)^2 + \frac{\alpha (\omega_p \sin \theta)^2}{2\omega_B (\omega - k_z V + \omega_B)} = 0. \quad (7.29)$$

Используя малость параметра ω_p/ω_B , находим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} &= \left(\alpha \frac{\omega_p}{\omega_B} \cos \theta \right)^{1/2} \frac{\omega_p \sin \theta}{2}; \\ \operatorname{Re} \omega &\approx \omega_p \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Эти результаты справедливы как при $\alpha \ll 1$, так и при $\alpha \approx 1$.

4. Циклотронно-черенковское взаимодействие. Ветвь циклотронных колебаний плазмы $\omega_1 \approx \omega_B$ может раскачиваться при взаимодействии с черенковской ветвью пучка. При изучении этого эффекта полагаем

$$\left. \begin{aligned} |\omega - \omega_B| &\ll \omega_B; \\ |\omega - k_z V| &\ll \omega_B. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Волновое число k_z в этом случае приближенно равно $k_z \approx \omega_B/V$. Уравнения (7.2) и (7.3) при условиях (7.31) сводятся к следующему:

$$1 - \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{2\omega_B (\omega - \omega_B)} - \frac{\alpha (\omega_p \cos \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2} = 0. \quad (7.32)$$

При $\alpha < (\omega_p/\omega_B)^2$ следует:

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right)^{1/3}. \quad (7.33)$$

Если же $\alpha > (\omega_p/\omega_B)^2$, вместо этого имеем

$$\gamma_{\max} = \frac{\omega_p \sin \theta}{2} \left(\alpha \frac{\omega_p}{\omega_B} \cos \theta \right)^{1/2}. \quad (7.34)$$

§ 7.3. Неустойчивость «горячего» пучка в плотной холодной плазме

Принятое в § 7.1 приближение холодного пучка справедливо, если $\gamma \gg k_z v_{T1}$, $k_{\perp} \rho_1 \ll 1$. При достаточно малых α с ростом теплового разброса пучка прежде нарушается первое из указанных неравенств. Поэтому исследование кинетических неустойчивостей, вызываемых пуч-

ком с конечным, но малым v_{T1}/V , можно проводить в приближении $k_{\perp} \rho_1 \ll 1$. Тогда, согласно (5.25), в выражении для $\epsilon_0^{(1)}$ останутся только члены, соответствующие черенковскому и первому циклотронному резонансам, так что

$$\epsilon_0^{(1)} = \alpha \frac{\omega_{p0}^2 m}{k^2 T_1} \left\{ 1 + i \sqrt{\pi} x_0 \left[W(x_0) + \frac{k_{\perp}^2 T_1}{m \omega_B^2} (W(x_1) + W(x_{-1})) \right] \right\}. \quad (7.35)$$

Здесь $x_n = (\omega - n\omega_B - k_z V) / |k_z| v_{T1}$; $n = 0 \pm 1$; $\alpha = n_1/n_0$.

1. Черенковское взаимодействие пучка с собственными колебаниями плазмы. Выражение (7.10) для инкремента черенковской гидродинамической неустойчивости справедливо, если

$$\frac{v_{T1}}{V} < \frac{\gamma}{\omega} \approx \frac{\alpha^{1/3} \omega_p \cos \theta}{\omega [\omega_p (\partial \epsilon_0 / \partial \omega)]^{1/3}}. \quad (7.36)$$

При $\omega_p \gg \omega_B$ и $\cos \theta \approx \sin \theta$ критерий (7.36) для обеих ветвей колебаний $\omega_{1,2}$ совпадает по порядку величины с (3.6). При $\omega_p \ll \omega_B$ то же самое имеет место для ветви ω_2 . Для ветви ω_1 критерий (7.36) в этом случае означает

$$v_{T1}/V < \alpha^{1/3} (\omega_p/\omega_B)^{4/3}. \quad (7.37)$$

При нарушении условия (7.36) черенковская неустойчивость пучка в плазме становится существенно кинетической. Кинетический инкремент находим по формуле (2.17), подставляя в нее в качестве $\operatorname{Re} \epsilon_0$ выражение (7.3) для $\epsilon_0^{(0)}$, а в качестве $\operatorname{Im} \epsilon_0$ — член мнимой части (7.35), пропорциональный $\operatorname{Re} W(x_0)$. Таким образом, получаем результат, аналогичный (3.14):

$$\gamma_{1,2} = - \frac{2 \sqrt{\pi} \alpha \omega_p^2}{v_{T1}^3 k^2 |k_z|} \left\{ \frac{\omega - k_z V}{\partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega} \exp \left[- \left(\frac{\omega - k_z V}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] \right\}_{\omega=\omega_{1,2}}. \quad (7.38)$$

Максимум кинетического инкремента пучка с $v_{T1} \ll V$ достигается приближенно при тех же значениях k_z , что и в случае холодного пучка [условие (7.9)], причем

$$\gamma_{1,2 \max} \approx \alpha \left(\frac{V}{v_{T1}} \right)^2 \frac{(\omega_p \cos \theta)^2}{(\omega^2 \partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega)_{\omega=\omega_{1,2}}}. \quad (7.39)$$

Зависимость инкремента от параметра V/v_{T1} такая же, как и при $\mathbf{B}_0 = 0$ [ср. (7.39) с (3.16) и см. рис. 3.2].

В предельных случаях слабого и сильного магнитного поля из (7.39) следует:

$$\gamma_{1,2 \text{ макс}} \approx \frac{\alpha}{2} \left(\frac{V}{v_{T1}} \right)^2 (\omega_p \cos^2 \theta, \omega_B \cos \theta \sin \theta); \quad \omega_p \gg \omega_B; \quad (7.40)$$

$$\gamma_{1,2 \text{ макс}} \approx \frac{\alpha}{2} \left(\frac{V}{v_{T1}} \right)^2 \omega_p \left(\left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \cos \theta \right); \quad \omega_p \ll \omega_B. \quad (7.41)$$

2. Циклотронная раскачка пучком колебаний плазмы. Пренебрегать тепловым разбросом пучка при рассмотрении раскачки колебаний с $\omega \approx k_z V \pm \omega_B$ можно, если

$$\frac{v_{T1}}{V} < \frac{\gamma_{1,2}}{|\omega_{1,2}| + |\omega_B|} \approx \frac{\alpha^{1/2}}{\omega_B} \cdot \frac{\omega_p \sin \theta}{|\omega_{1,2}| + |\omega_B|} \times (2\partial\epsilon_0/\partial\omega)_{\omega=\omega_{1,2}}^{1/2}. \quad (7.42)$$

Здесь $\gamma_{1,2}$ — инкремент гидродинамического приближения (7.17). Для случаев слабого и сильного поля это условие означает:

$$\frac{v_{T1}}{V} < \frac{\alpha^{1/2}}{2} \sin \theta \left\{ \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2}; \frac{(\cos \theta)^{1/2} \sin \theta}{1 + |\cos \theta|} \right\}, \quad \omega_p \gg \omega_B; \quad (7.43)$$

$$\frac{v_{T1}}{V} < \frac{\alpha^{1/2}}{2} \sin \theta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \sin \theta; \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{3/2} (\cos \theta)^{1/2} \right\}, \quad \omega_p \ll \omega_B. \quad (7.44)$$

Эти ограничения на тепловой разброс пучка более жесткие, чем в случае черенковской раскачки [ср. с (7.36) и (7.37)].

При условии, обратном (7.42), циклотронное взаимодействие пучка с колебаниями приводит к кинетической неустойчивости с инкрементом

$$\gamma_{1,2} = - \frac{V \pi \alpha \omega_p^2 \sin^2 \theta}{\omega_B^2 |k_z| v_{T1}} \left\{ \frac{\omega - k_z V}{\partial\epsilon_0^{(0)}/\partial\omega} \times \exp \left[- \left(\frac{\omega - k_z V \mp \omega_B}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] \right\}_{\omega=\omega_{1,2}}. \quad (7.45)$$

Учитывая предполагаемую малость отношения v_{T1}/V , находим, что максимум кинетического инкремента достигается при k_z , приближенно удовлетворяющем соотношениям (7.16). По порядку величины

$$\gamma_{1,2} \approx \alpha \frac{V}{v_{T1}} \cdot \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{\omega_B} \times \left[(\omega \pm \omega_B) \frac{\partial\epsilon_0^{(0)}}{\partial\omega} \right]_{\omega=\omega_{1,2}}^{-1}. \quad (7.46)$$

С увеличением v_{T1}/V циклотронный инкремент спадает медленнее черенковского (рис. 7.3). В случае $\omega_p \approx \omega_B$, $\cos \theta \approx \sin \theta$ оба инкремента сравниваются по порядку величины при $v_{T1} \approx V$ (т. е. на границе применимости принятого здесь приближения $v_{T1} \ll V$). При этом $\gamma \approx \alpha \omega_B$.

В предельных случаях большого и малого ω_p/ω_B из (7.46) следует:

$$\gamma_{1,2} \approx \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{V}{v_{T1}} \omega_B \sin^2 \theta \left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2, \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{1 + |\cos \theta|} \right]; \quad (7.47)$$

$$\alpha^{-1/3} > \frac{\omega_p}{\omega_B} \gg 1,$$

$$\gamma_{1,2} \approx \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{V}{v_{T1}} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \omega_p \sin^2 \theta \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \sin^2 \theta, \cos \theta \right); \quad (7.48)$$

$$\omega_p/\omega_B \ll 1.$$

Из сравнения (7.48) с (7.41) видно, что в сильном магнитном поле ($\omega_B \gg \omega_p$) циклотронные инкременты малы по сравнению с черенковскими даже при $v_{T1} \approx V$.

3. Неустойчивость пучка, тепловая скорость которого сравнима с направленной. В случае $v_{T1} \approx V$ необходимо учитывать конечность ларморовского радиуса частиц пучка (если величины ω_p/ω_B или $\sin \theta$ не слишком малы).

При произвольных $k_{\perp} \rho_1$ и максвелловском распределении частиц пучка по скоростям функция $\epsilon_0^{(1)}$ определяется соотношением (5.25). Используя его, так же, как и в п. 1, находим общее выражение для кинетического инкремента

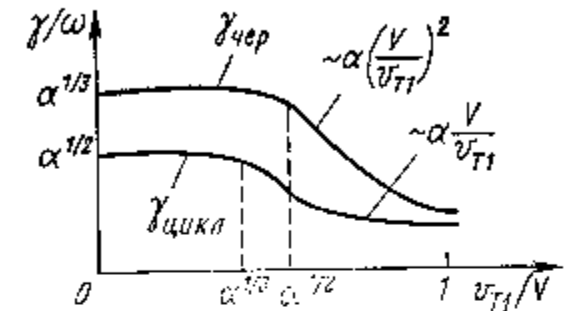


Рис. 7.3. Зависимость инкрементов колебаний от теплового разброса пучка

собственных колебаний холодной плазмы:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\sqrt{\pi} \alpha \omega_p^2}{k^2 |k_z| v_{T1}^2} \left\{ \frac{\omega - k_z V}{\partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \exp(-z) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\left(\frac{\omega - n\omega_B - k_z V}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] \right\}_{\omega=\omega_{1,2}}. \quad (7.49)$$

Если тепловая скорость не превосходит направленную, $v_{T1} \ll V$, то члены ряда (7.49) имеют максимум при k_z , лежащих вблизи $k_{z \text{ опт}} \equiv (\omega_{1,2} + |n| \omega_B) / V$ ($n \leq 0$) на интервале ширины

$$\Delta k_z / k_{z \text{ опт}} \simeq v_{T1} / V. \quad (7.50)$$

Величина членов ряда существенно зависит и от поперечного волнового числа k_{\perp} . Максимум члена с $n = 0$ приходится на длинные волны, $z < 1$, а членов с $|n| \geq 1$ — на $z \simeq 1$. При $V \simeq v_{T1}$, $\omega_p \simeq \omega_B$ основной вклад в инкремент дают члены ряда с малыми номерами. Характерные длины волн возбуждаемых колебаний в этом случае порядка $k_z \simeq k_{\perp} \simeq 1/\rho_1$, а инкремент колебаний порядка

$$\gamma \simeq \alpha \omega_B. \quad (7.51)$$

§ 7.4. Неустойчивость медленного пучка в горячей плазме

При конечной температуре плазмы в уравнение (7.2) в качестве $\epsilon_0^{(0)}$ должно быть подставлено выражение, вытекающее из (5.24):

$$\epsilon_0^{(0)} = \frac{1}{(kd_0)^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T0}} \times \right. \\ \left. \times \sum \exp(-z_0) I_n(z_0) W \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_{T0}} \right) \right]. \quad (7.52)$$

Здесь $z_0 = k_{\perp}^2 T_0 / m \omega_B^2$; $d_0^2 = T_0 / 4\pi e^2 n_0$.

Ниже ограничимся рассмотрением предельного случая сильного магнитного поля, $\omega_p \ll \omega_B$. Относительно взаимодействия пучка с горячей плазмой при $\omega_p \gg \omega_B$ заметим следующее. С помощью (7.52) и (7.2) можно найти, что при $\omega_p \gg \omega_B$ плазму следует считать горячей, если $v_{T0} \gg V$, как и в приближении $B_0 = 0$, см. § 3.1. Картина неустойчивостей при этом сходна с рассмотренной в § 3.3.

При $\omega_p \ll \omega_B$ условие холодности плазмы, $v_{T0} < V$, остается в силе только для случая черенков-черенковской раскачки ($\omega \approx \omega_p$, $\cos \theta \approx k_z V$). В случае черенков-циклотронной раскачки ($\omega \approx \omega_p \cos \theta$, $k_z \approx \omega_B / V$) условие холодности оказывается более жестким:

$$v_{T0} / V < \omega_p / \omega_B. \quad (7.53)$$

Еще более жесткое ограничение на тепловой разброс плазмы следует для циклотронно-черенковского ($\omega \approx \omega_B$, $k_z V \approx \omega$) и циклотронно-циклотронного ($\omega \approx \omega_B$, $k_z V \approx |\omega| + |\omega_B|$) взаимодействий:

$$v_{T0} / V < (\omega_p / \omega_B)^2. \quad (7.54)$$

Общее представление о неустойчивостях плазмы с $\omega_p \ll \omega_B$ и конечным $\omega_p \ll \omega_B$ можно получить с помощью рис. 7.4 и нижеследующих соотношений.

При $v_{T0} / V > (\omega_p / \omega_B)^2$ инкременты циклотронно-черенковской и циклотронно-циклотронной неустойчивостей определяются кинетическими эффектами. Их максимальные значения равны

$$\gamma_{\text{цикл-чер}} = \frac{\sqrt{\pi} \alpha^{1/2}}{4} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \cdot \frac{V}{v_{T0}} \cos \theta \sin^2 \theta; \quad (7.55)$$

$$\gamma_{\text{цикл-цикл}} = \frac{\sqrt{\pi} \alpha}{8} \cdot \frac{\omega_p^4}{\omega_B^2} \cdot \frac{V}{v_{T0}} \sin^4 \theta. \quad (7.56)$$

При $v_{T0} / V > \omega_p / \omega_B$ кинетической становится и черенков-циклотронная неустойчивость. Ее максимальный инкремент равен

$$\gamma_{\text{чер-цикл}} = \frac{\sqrt{\pi} \alpha e^{-1/2} \omega_p}{\omega_B^3} \cdot \frac{V^2}{v_{T0}^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (7.57)$$

Для быстрого пучка, $v_{T0} / V < \omega_p / \omega_B$, инкременты (7.55) — (7.57) малы по сравнению с инкрементом черенков-черенковской неустойчивости. Последний при этом

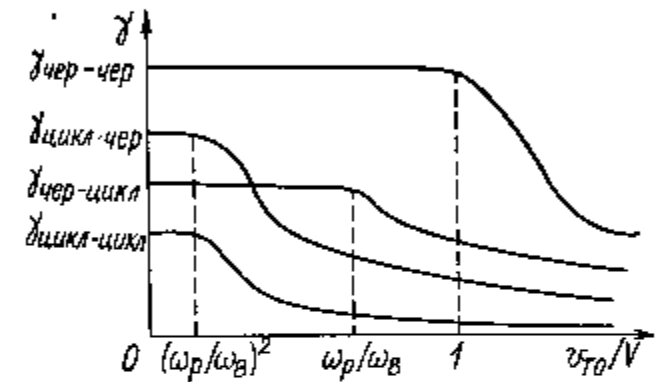


Рис. 7.4. Зависимость инкрементов колебаний от теплового разброса плазмы при $\omega_p \ll \omega_B$

условии определяется гидродинамическим выражением (7.24).

В пределе медленного пучка, $V/v_{T0} \ll 1$, черенков-черенковская неустойчивость является кинетической и описывается соотношениями, аналогичными приведенным в § 3.3. Этой неустойчивости соответствует минимальная пороговая скорость пучка, способного возбуждать колебания. Поэтому при достаточно малой скорости пучка черенков-черенковская неустойчивость является определяющей.

§ 7.5. Неустойчивость одномерного распределения с одним максимумом

Как было показано в § 2.7 и 2.8, при $V_0 = 0$ плазма устойчива относительно потенциальных возмущений, если ее одномерная функция распределения имеет только один максимум.

Покажем теперь, что плазма с таким распределением частиц по скоростям может быть неустойчива, если $V_0 \neq 0$.

Рассмотрим распределение вида $f_0 = f_0^{(0)} + f_0^{(1)}$, где $f_0^{(0)} = n_0 \delta(v)$, $f_0^{(1)} = n_1 \delta(v_{\perp}) F(v_z)$, а функция

$$F(v_z) = \begin{cases} 1/v_1 & \text{при } 0 < v_z < v_1; \\ 0 & \text{при } v_z < 0, v_z > v_1. \end{cases} \quad (7.58)$$

Одномерное распределение по скоростям v_z (вдоль V_0), соответствующее функции f_0 , изображено на рис. 7.5. Аналогичный вид имеет одномерная функция распределения и при других направлениях скорости, так что во всех случаях эта функция имеет только один максимум.

Перейдем к исследованию возмущений. Полагаем $\alpha \equiv n_1/n_0 \ll 1$. В нулевом приближении по этому параметру возмущения имеют вещественные частоты ω_1, ω_2 , определенные уравнениями (6.2). Мнимую добавку к частоте (инкремент) находим с помощью формулы (2.17), под-

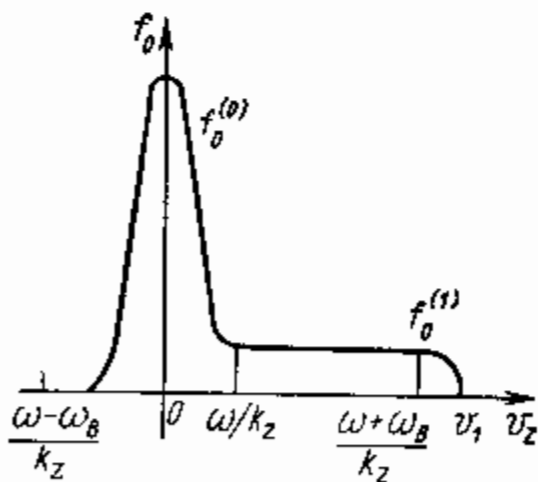


Рис. 7.5. Пример неустойчивого одномерного распределения с одним максимумом

ставляя в нее $\text{Re } \epsilon_0 = \epsilon_0^{(0)}$, определенное уравнением (7.3), и $\text{Im } \epsilon_0$ вида

$$\text{Im } \epsilon_0 = -\pi \alpha \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{2\omega_B |k_z|} \left[F\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z}\right) - F\left(\frac{\omega + \omega_B}{k_z}\right) \right]. \quad (7.59)$$

Это выражение получается с помощью формулы (5.22), в которой надо положить $k_{\perp} \rho \ll 1$. При получении (7.59) учтено, что, поскольку $\partial F / \partial v_z = 0$, отсутствует вклад из-за черенковского резонанса $v_z = \omega/k_z$. Вклад в (7.59) дают только циклотронные резонансы $v_z = (\omega - \omega_B)/k_z$ (нормальный эффект Доплера) и $v_z = (\omega + \omega_B)/k_z$ (аномальный эффект Доплера).

Знак инкремента колебаний определяется знаком произведения $\omega \text{Im } \epsilon_0$. С помощью (7.59) находим, что инкремент положителен (условие неустойчивости), если

$$\frac{\omega}{\omega_B} \left[F\left(\frac{\omega + \omega_B}{k_z}\right) - F\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z}\right) \right] > 0. \quad (7.60)$$

Это условие удовлетворяется, если выполнено каждое из следующих неравенств:

$$\left. \begin{aligned} |\omega| < |\omega_B|; \\ |\omega| + |\omega_B| < |k_z| v_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Из первого неравенства (7.61) следует, что раскачиваться может только ветвь ω_2 . Из второго вытекает ограничение снизу на интервал волновых чисел нарастающих возмущений:

$$k_z \gtrsim \omega_B/v_1. \quad (7.62)$$

Однако k_z не должно быть слишком большим:

$$k_z \ll \omega_2/v_{T0}, \quad (7.63)$$

так как в противном случае нельзя использовать приближение холодной плазмы. Из (7.62) и (7.63) получается ограничение на температуру плазмы (одно из условий неустойчивости):

$$v_{T0}/v_1 \ll \omega_2/\omega_B. \quad (7.64)$$

В случае сильного магнитного поля, $\omega_B > \omega_p$, частота ω_2 не превышает плазменную, $\omega_2 \leq \omega_p$. При этом (7.64) означает

$$v_{T0}/v_1 \ll \omega_p/\omega_B. \quad (7.65)$$

Инкремент возмущений по порядку величины равен

$$\gamma \simeq \alpha (\omega_p / \omega_B)^2 \omega_2. \quad (7.66)$$

Реально такая неустойчивость может проявляться в плазме с убегающими электронами.

Библиографический обзор к гл. 7

1. Pierce J. R. Possible fluctuations in electron stream due to ions. — «J. Appl. Phys.», 1948, v. 19, p. 231.
Получено дисперсионное уравнение для системы холодных потоков в магнитном поле [уравнение (7.1)].
2. Файнберг Я. Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. — «Атомная энергия», 1961, т. 11, с. 313.
Дан обзор пучковых неустойчивостей.
3. Железняков В. В. О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1959, т. 2, с. 14.
4. Ковнер М. С. Кипетическое рассмотрение взаимодействия потока заряженных частиц с неподвижной плазмой в магнитном поле. «Изв. вузов. Радиофизика», 1960, т. 3, с. 631, 746.
5. Раппопорт В. О. О нарастании электромагнитных волн в потоке, движущемся в плазме при наличии магнитного поля. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1960, т. 3, с. 767.
6. Степанов К. Н., Киценко А. Б. О возбуждении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме пучком заряженных частиц. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 167.
7. Bernstein I. B., Trehan K. Plasma oscillations. — «Nucl. Fusion», 1960, v. 1, p. 3.
8. Neufeld J., Doyle P. H. Electromagnetic interaction of a beam of charged particles with plasma. — «Phys. Rev.», 1961, v. 124, p. 654.
9. Neufeld J., Wright H. Instabilities in a plasma-beam system immersed in a magnetic field. — «Phys. Rev.», 1963, v. 129, p. 1489.
10. Ахизер А. И. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
В работах [3—10] исследовались неустойчивости пучка, движущегося вдоль магнитного поля, — холодного, а также горячего с максвелловским распределением частиц около средней скорости. Электростатические (потенциальные) неустойчивости холодного пучка в холодной плазме (§ 7.1 и 7.2) обсуждались в работах [5, 6, 10], а горячего (§ 7.3) — в работах [3, 6, 10]. Взаимодействие холодного пучка с горячей плазмой (§ 7.4) исследовалось в работе [10]. В каждой из работ [3—10] учитывалась непотенциальность возмущений. В работах [3, 7, 9] было принято $k_{\perp} = 0$ и исследовались возмущения электромагнитного типа ($E_z = 0$). В работе [10] обсуждается также устойчивость одномерного распределения плазмы в магнитном поле (§ 7.5).
11. Etievant C., Perulli M. Mise en evidence d'une interaction entre deux faisceaux s'interpenetrant dans un champ magnetique. — «Compt. rend. Acad. Sci.», 1962, v. 255, p. 2739.

12. Ломвнадзе Д. Г., Степанов К. Н. Об устойчивости двух сталкивающихся потоков плазмы в магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 205.

В работах [11, 12] исследуется возбуждение колебаний при столкновении равноплотных плазм (§ 7.2).

ГЛАВА 8

ПЛАЗМА С ПЕМАКСВЕЛЛОВСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

§ 8.1. Об аналогии между эффектами пучка и анизотропии

При анизотропном распределении частиц по скоростям может проявляться новый механизм раскачки колебаний, специфичный только для плазмы в магнитном поле.

1. Дисперсионное уравнение колебаний сильноанизотропной плазмы. Пусть распределение электронов по скоростям сильно анизотропно:

$$\partial f_0 / \partial v_z^2 \gg \partial f_0 / \partial v_{\perp}^2. \quad (8.1)$$

Рассмотрим потенциальные возмущения такой плазмы. Предположение о потенциальности, оправданное при достаточно малом давлении плазмы, позволяет пренебречь в кинетическом уравнении возмущенным магнитным полем, а условие (8.1) — возмущенным электрическим полем, поперечным \mathbf{B}_0 . Упрощенное таким путем кинетическое уравнение в лагранжевых переменных имеет вид

$$\frac{df}{dt} = -\frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z}. \quad (8.2)$$

В правой части от времени зависит только $E_z \equiv E_z[\mathbf{r}(t), t]$, поэтому

$$f = -\frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int^t E_z[\mathbf{r}(t'), t'] dt'. \quad (8.3)$$

Зависимость поля от координат и времени выбираем в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i k_z z + i k_x x)$. Стоящие в показателе экспоненты координаты x, z должны быть взяты в точке

нахождения частицы в момент времени t' (на траектории частицы). Вдоль магнитного поля частица движется свободно, поэтому $z(t') = z_0 + v_z t'$. Поперечная траектория частицы есть ларморовская окружность. В точках этой окружности

$$x(t') = x_0 - \frac{v_{\perp}}{\omega_B} [\cos(\alpha_0 - \omega_B t') - \cos \alpha_0].$$

В результате под интегралом в (8.3) имеем экспоненту вида

$$\exp \left[-i(\omega - k_z v_z) t' - \frac{ik_x v_{\perp}}{\omega_B} \cos(\alpha_0 - \omega_B t') \right]. \quad (8.4)$$

Поясним смысл этой экспоненты. Пусть $v_{\perp} = 0$, так что частица перемещается только вдоль магнитного поля. Скорость такого перемещения постоянна. В этом случае на частицу действует поле смещенной частоты $\omega' = \omega - k_z v_z$. Этот эффект соответствует члену с ω' в экспоненте (8.4).

Движение частицы поперек магнитного поля не является прямолинейным и равномерным. Поэтому результат его не сводится к простому сдвигу эффективной частоты поля, действующего на частицу. Всякий периодический процесс может быть, однако, представлен в виде суперпозиции синусоидальных процессов. В частности, экспоненте (8.4) соответствует следующая суперпозиция простых экспонент:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \exp \left[-i(\omega - k_z v_z - n\omega_B) t' - in\alpha_0 \right]. \quad (8.5)$$

Отсюда следует, что равновесное движение частицы поперек магнитного поля приводит к расщеплению одной эффективной частоты ω' на бесконечный набор эффективных частот $\omega'' = \omega - k_z v_z - n\omega_B$ (расщепление на циклотронные гармоники). Относительная роль соответствующей гармоники характеризуется величиной $J_n(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B)$.

Согласно (8.3) — (8.5), возмущенная функция распределения выражается в виде суперпозиции величин, соот-

ветствующих каждой из эффективных частот:

$$f = \sum_n f_n; \quad (8.6)$$

$$f_n = -\frac{ie}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_z} E_z J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \frac{1}{\omega - k_z v_z - n\omega_B} \times \\ \times \exp \left[-i(\omega - k_z v_z - n\omega_B) t + i\alpha_0 n + \right. \\ \left. + ik_z z_0 + ik_x \left(x_0 + \frac{v_{\perp} \cos \alpha_0}{\omega_B} \right) \right]. \quad (8.7)$$

Теперь выразим стоящие в правой части (8.7) функции лагранжевых переменных r_0, v_0 через эйлеровы r, v . Такой переход осуществляется с помощью соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &\rightarrow \alpha + \omega_B t; \\ x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \cos \alpha_0 &\rightarrow x + \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \cos \alpha; \\ z_0 &\rightarrow z + v_z t. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

В результате (8.7) сводится к следующему выражению:

$$f_n = -\frac{ie}{m} E_{0z} \exp(-i\omega t + ik_z z + ik_x x) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \times \\ \times \frac{J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \exp \left(i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \cos \alpha - in\alpha \right)}{\omega - n\omega_B - k_z v_z}. \quad (8.9)$$

Отметим, что при указанном преобразовании переменных частота каждой из гармоник f_n оказывается равной частоте поля ω .

Интегрируя (8.9) по скоростям, находим возмущенную плотность заряда. Просуммированная по всем гармоникам, она равна

$$\rho = \int e f d\mathbf{v} = -\frac{ie^2}{m} E_z \sum_n \int J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \times \\ \times \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{\omega - k_z v_z - n\omega_B} d\mathbf{v}. \quad (8.10)$$

Подставляя этот результат в уравнение Пуассона, получаем искомое дисперсионное уравнение колебаний сильно-

анизотропной плазмы

$$1 + \sum \frac{4\pi e^2 k_z}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int J_n^2 \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} dv = 0. \quad (8.11)$$

Более общее уравнение, справедливое при любой степени анизотропии, получается с помощью (5.26).

2. О механизме анизотропной неустойчивости. Пусть равновесная функция f_0 равна произведению продольной и поперечной частей:

$$f_0 = n_0 f_{\perp}(v_{\perp}) f_{\parallel}(v_z). \quad (8.12)$$

Тогда n -я гармоника возмущенной функции распределения f_n , проинтегрированная по поперечным скоростям, согласно (8.9), имеет вид

$$f_n(v_z) \equiv \int f_n dv_{\perp} = -\frac{ieE_z \langle J_n^2 \rangle \partial f_{\parallel} / \partial v_z}{m(\omega - n\omega_B - k_z v_z)}. \quad (8.13)$$

$$\text{Здесь } \langle J_n^2 \rangle = \int_0^{\infty} J_n^2 f_{\perp} v_{\perp} dv_{\perp}.$$

Сравним этот результат с возмущенной функцией распределения пучка, движущегося вдоль магнитного поля:

$$f(v_z') = -\frac{ieE_z}{m} \frac{\partial f_{\parallel} / \partial v_z'}{\omega - k_z V - k_z v_z'} \quad (8.14)$$

(v_z' — разброс пучка по скоростям). Видно, что n -я гармоника аналогична пучку с эффективной скоростью $V_{\text{эф}}^{(n)}$:

$$V_{\text{эф}}^{(n)} = n\omega_B / k_z. \quad (8.15)$$

Из указанной аналогии следует, что в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям могут иметь место неустойчивости такого же типа, как и в плазме с пучками. В зависимости от соотношений между параметрами, входящими в (8.11), эти неустойчивости могут проявляться как «гидродинамические» либо как «кинетические» пучковые неустойчивости, рассмотренные соответственно в гл. 1 и 3.

Физически отличие сильноанизотропной плазмы от совокупности обычных потоков состоит в следующем. На частицы потоков в системе их покоя действует синусоидальное во времени поле, т. е. поле только одной частоты. Наличие возмущенных движений с различными эффективными частотами в этом случае обязано относительному движению частиц. На частицу, движущуюся в магнитном поле с отличной от нуля поперечной скоростью, в системе ее покоя действует не синусоидальное поле, т. е. совокупность многих полей с различными эффективными частотами. Эффект «многолучковости» обусловлен тем, что одна и та же частица одновременно участвует в различных типах возмущенных движений.

§ 8.2. Неустойчивость гидродинамического типа анизотропной плазмы

Предположим распределение электронов плазмы по скоростям существенно анизотропным:

$$\bar{v}_{\perp e} \gg \bar{v}_{\parallel e}. \quad (8.16)$$

Для исследования устойчивости такой плазмы воспользуемся приближенным дисперсионным уравнением (8.11), в общих чертах обсуждавшимся в п. 1 § 8.1. Вкладом ионов в диэлектрическую проницаемость пренебрежем, $\epsilon_0^{(i)} \rightarrow 0$. Рассмотрим возмущения, для которых удовлетворяется условие

$$|\omega - n\omega_{Be}| \gg k_z v_{\parallel e}. \quad (8.17)$$

Малыми в этом приближении эффектами резонансных частиц пренебрегаем. Тогда из (8.3) следует

$$1 - \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle J_n^2 \rangle}{(\omega - n\omega_{Be})^2} = 0. \quad (8.18)$$

1. Неустойчивость длинноволновых возмущений. В простейшем случае длинноволновых возмущений,

$k_{\perp} \rho_e \ll 1$, это уравнение соответствует «системе трех пучков» (см. п. 2 § 8.1):

$$1 - \cos^2 \theta \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - k_{\perp}^2 \rho_e^2 \frac{\cos^2 \theta}{2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_{Be})^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_{Be})^2} \right] = 0; \quad (8.19)$$

$$\rho_e^2 = \langle v_{\perp}^2 / 2 \rangle / \omega_{Be}^2.$$

Эффективная плотность «покоящейся» компоненты превосходит эффективную плотность «движущихся потоков» в $(k_{\perp} \rho_e)^{-2}$ раз, так что в приближении длинноволновых возмущений задача об анизотропной неустойчивости оказывается полностью аналогичной рассмотренной в п. 2 § 1.5 задаче о взаимодействии пучка малой плотности с плазмой. Такой пучок, как показано в § 1.5, может приводить к раскачке двух типов колебаний: собственных колебаний покоящейся плазмы (резонансная неустойчивость) и сносных колебаний (нерезонансная неустойчивость). Аналогичные эффекты имеют место и в случае анизотропной плазмы. Резонансная неустойчивость связана с раскачкой колебаний, частота которых приближенно равна

$$\omega \approx \omega_{pe} \cos \theta \approx \omega_{Be}. \quad (8.20)$$

Инкремент этих колебаний

$$\gamma \simeq \omega_{Be} (k_{\perp} \rho_e)^{2/3}. \quad (8.21)$$

Того же порядка и интервал частот возбуждаемых колебаний.

Частота колебаний, соответствующих нерезонансной неустойчивости, удовлетворяет условию

$$\omega \approx \omega_{Be} < \omega_{pe} \cos \theta. \quad (8.22)$$

Инкремент при нерезонансной неустойчивости несколько меньше, чем $\gamma_{рез}$:

$$\gamma \simeq \omega_{Be} k_{\perp} \rho_e \equiv k_{\perp} \bar{v}_{\perp e}. \quad (8.23)$$

Уравнение (8.19) и вытекающие из него результаты справедливы только при не слишком малых $k_{\perp} \rho_e$ и $\cos \theta$. Это связано с тем, что сами исходные уравнения (8.11) и (8.18) являются приближенными — в них не учитывается возмущенное движение частиц поперек магнитного поля.

При учете этого эффекта, малого при $k_{\perp} \rho_e \ll 1$ и $\bar{v}_{\perp e} \gg v_{||e}$, вместо уравнения (8.18) из (5.26) вытекает

следующее:

$$1 - \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle J_n^2 \rangle}{(\omega - n\omega_{Be})^2} - \frac{2\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\omega_{Be}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \langle \frac{J_n J'_n}{\xi} \rangle}{\omega - n\omega_{Be}} = 0. \quad (8.24)$$

При малых $k_{\perp} \rho_e$ и $\omega \approx \omega_{Be}$ отсюда следует

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{(\omega - \omega_{Be})^2} \frac{(k_{\perp} \rho_e)^2}{2} - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{2\omega_{Be}(\omega - \omega_{Be})} = 0. \quad (8.25)$$

С помощью (8.25) находим, что приведенные выше результаты, касающиеся резонансной и нерезонансной

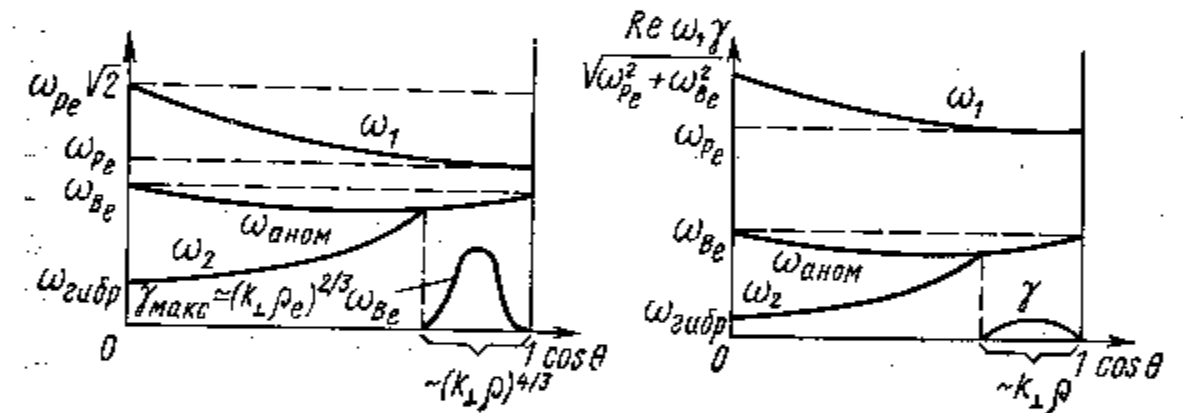


Рис. 8.1. Ветви колебаний при резонансной анизотропной неустойчивости ($\omega_{pe} \approx \omega_{Be}$)

Рис. 8.2. Ветви колебаний при нерезонансной анизотропной неустойчивости ($\omega_{pe} > \omega_{Be}$)

неустойчивостей, справедливы при $k_{\perp} \rho_e$ и θ , соответственно удовлетворяющих соотношениям:

$$(\operatorname{tg} \theta)^{3/2} \ll k_{\perp} \rho_e \ll 1; \quad (8.26)$$

$$(\operatorname{tg} \theta)^2 \ll k_{\perp} \rho_e \ll 1. \quad (8.27)$$

Как видно, эти соотношения могут удовлетворяться только при

$$\sin \theta \ll 1. \quad (8.28)$$

Если θ не удовлетворяет (8.26) и (8.27), то колебания, описываемые уравнением (8.25), устойчивы.

Решения уравнения (8.25) представлены на рис. 8.1 (резонансная неустойчивость, $\omega_{pe} \approx \omega_{Be}$) и рис. 8.2

(нерезонансная неустойчивость, $\omega_{pe} > \omega_{Be}$). Видно, что наряду с ветвями колебаний ω_1, ω_2 , существующими и при максвелловском распределении электронов по скоростям (ср. с рис. 6.1), в анизотропной плазме появляется дополнительная (аномальная) ветвь колебаний $\omega = \omega_{аном} = \omega_{Be}$, аналогичная ветвям сносных колебаний в плазме с пучками (ср. с рис. 1.1). Резонансная анизотропная неустойчивость, аналогично резонансной пучковой неустойчивости, имеет место в случае, когда близки друг к другу частоты трех ветвей колебаний ($\omega_1, \omega_2, \omega_{аном}$). Для этого необходимо, чтобы $\omega_{pe} \approx \omega_{Be}$. При нерезонансной неустойчивости близки друг к другу частоты только двух ветвей: ω_2 и $\omega_{аном}$.

2. Неустойчивость гидродинамического типа при $k_{\perp} \rho_e \gg 1$. Инкременты колебаний, рассмотренных в п. 1, увеличиваются с ростом $k_{\perp} \rho_e$. Однако сами выражения для инкрементов (8.21) и (8.23) справедливы только при $k_{\perp} \rho_e \ll 1$. Чтобы рассмотреть неустойчивость возмущений с $k_{\perp} \rho_e \gg 1$, нужно исследовать уравнение (8.24), справедливое как при $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, так и при $k_{\perp} \rho_e \gg 1$. Для простоты будем считать, что распределение электронов по поперечным скоростям является максвелловским с температурой T_{\perp} . При этом (8.24) запишется в виде

$$1 + \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{k_{\perp}^2 d_{\perp e}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} I_0 \exp(-z) - \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta \sum_{n \neq 0} \frac{I_n \exp(-z)}{(\omega - n\omega_{Be})^2} - \frac{\omega}{k_{\perp}^2 d_{\perp e}^2} \sum_{n \neq 0} \frac{I_n \exp(-z)}{\omega - n\omega_{Be}} = 0, \quad (8.29)$$

$$z \equiv k_{\perp}^2 T_{\perp e} / m_e \omega_{Be}^2; \quad d_{\perp e}^2 = T_{\perp} / 4\pi e^2 n_0.$$

Это уравнение вытекает также из (5.27). Слагаемые в (8.29) сгруппированы так, чтобы при частоте колебаний, близкой к какой-либо определенной гармонике, $\omega \approx n' \omega_{Be}$, можно было пренебречь всеми членами бесконечных сумм, кроме $n = n'$. Если частота колебаний не близка к циклотронным гармоникам, то малой является каждая из сумм в целом. Поэтому вместо уравнения (8.29) достаточно рассмотреть вытекающее из него более простое

приближенное уравнение

$$1 + \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{k_{\perp}^2 d_{\perp e}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} I_0 \exp(-z) - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta I_n \exp(-z)}{(\omega - n\omega_{Be})^2} - \frac{\omega I_n \exp(-z)}{k_{\perp}^2 d_{\perp e}^2 (\omega - n\omega_{Be})} = 0. \quad (8.30)$$

Произведение $I_n(z) \exp(-z)$ при $n \neq 0$ численно мало: максимум его при всех n и z не превышает 0,2 (этот максимум достигается при $n = 1, z \approx 1,5$), тогда как $I_0 \exp(-z)$ становится малым только при $z \gg 1$. Благодаря этому при $z \approx 1$ уравнение (8.30) можно проанализировать приближенным методом, использованным в п. 1. В пренебрежении членами порядка $I_n \exp(-z)$ ($n \neq 0$) находим частоту собственных колебаний холодной компоненты плазмы:

$$\omega_0^2 = k_{\perp}^2 \frac{T_{\perp e}}{m_e} \cdot \frac{I_0 \exp(-z)}{1 - I_0 \exp(-z) + k_{\perp}^2 d_{\perp e}^2}. \quad (8.31)$$

Резонансная неустойчивость этих колебаний имеет место при $\omega_0 \approx n\omega_{Be}$. Инкремент ее равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{I_n}{I_0} \right)^{1/3} \omega_{Be}. \quad (8.32)$$

В пределе малых $k_{\perp} \rho_e$ этот результат совпадает с (8.21) [в (8.21) для простоты опущен численный коэффициент]. С ростом $k_{\perp} \rho_e$ инкремент стремится к максимуму, несколько меньшему ω_{Be} . При больших $k_{\perp} \rho_e$, таких, что $I_n \approx I_0$, выражение (8.32) справедливо только по порядку величины. В качестве оценки для максимального инкремента можно принять величину

$$\gamma_{\max} \approx \omega_{Be} / 2. \quad (8.33)$$

Рассматриваемая здесь резонансная неустойчивость гидродинамического типа невозможна при слишком малой плотности плазмы, поскольку при этом не удовлетворяется условие $\omega_0 \approx n\omega_{Be}$. Из (8.31) находим связь между относительной плотностью плазмы и волновым вектором неустойчивых возмущений:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} = \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)_{\text{крит}} \equiv \left(\cos^2 \theta I_0 \exp(-z) - \sin^2 \theta \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{z} \right)^{-1}. \quad (8.34)$$

Отсюда вытекает необходимое условие неустойчивости

$$\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 > 1. \quad (8.35)$$

При $\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2$, не намного отличающемся от единицы, неустойчивость связана с возмущениями, у которых $\cos \theta \approx 1$, $z \ll 1$. Это находится в соответствии с (8.20). С ростом $\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2$ интервалы $\cos \theta$ и z увеличиваются.

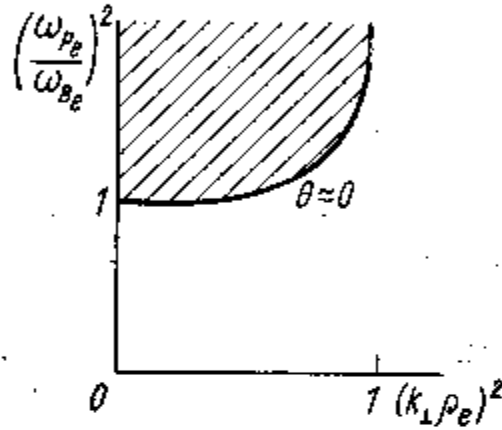


Рис. 8.3. Критическая плотность в случае анизотропной неустойчивости гидродинамического типа (заштрихована область неустойчивости)

Зависимость критической плотности от z представлена на рис. 8.3.

Нерезонансная неустойчивость возможна только при плотности плазмы, превосходящей критическую. В случае не очень больших волновых чисел, таких, что $I_0 > I_n$ и $\omega_{pe} \gg \omega_{pe \text{ крит}}$, частота и инкремент возмущений, соответствующих нерезонансной неустойчивости, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= n\omega_{Be}; \\ \gamma &\simeq (I_n/I_0)^{1/2} \omega_{Be}. \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

При $z \gg 1$ различие между резонансной и нерезонансной неустойчивостями становится несущественным, тем более что теряется сама аналогия с задачей о лучке малой плотности.

3. Степень анизотропии, необходимая для развития неустойчивостей гидродинамического типа. Результаты двух предыдущих пунктов получены в предположении малости эффектов резонансных частиц. При максвелловском распределении электронов по продольным скоростям (с «температурой» $T_{||}$) это предположение означает

$$\gamma \gg k_z v_{T||}. \quad (8.37)$$

(Индекс e у $T_{||}$, T_{\perp} , $v_{T||}$ опускаем.) Отсюда, в частности, вытекает, что необходимым условием длинноволновой резонансной неустойчивости с инкрементом (8.21) является малость отношения $T_{||}/T_{\perp}$:

$$T_{||}/T_{\perp} < (k_{\perp} \rho_e)^{2/3}. \quad (8.38)$$

При получении (8.38) учтено также соотношение (8.26). Аналогичное условие с использованием соотношений (8.23), (8.27) и (8.37) получается и для длинноволновой нерезонансной неустойчивости:

$$T_{||}/T_{\perp} < k_{\perp} \rho_e. \quad (8.39)$$

Условия (8.38) и (8.39) качественно справедливы и при $k_{\perp} \rho_e \simeq 1$. Следует, однако, иметь в виду, что в согласии с полученным ниже общим результатом (8.49) необходимое для неустойчивости отношение $T_{||}/T_{\perp}$ не может превысить $1/2$.

При $k_{\perp} \rho_e \gg 1$ критерий на анизотропию получается из условия, что фазовая скорость колебаний типа (8.31) велика по сравнению с продольной скоростью электронов, $\omega/k_z > v_{T||}$. В результате имеем

$$T_{||}/T_{\perp} < \frac{1}{k_{\perp} \rho_e \sqrt{2\pi}}. \quad (8.40)$$

С помощью (8.38) — (8.40) можно получить качественное представление о границе анизотропной неустойчивости гидродинамического типа при любых $k_{\perp} \rho_e$. Схематически эта граница изображена на рис. 8.4.

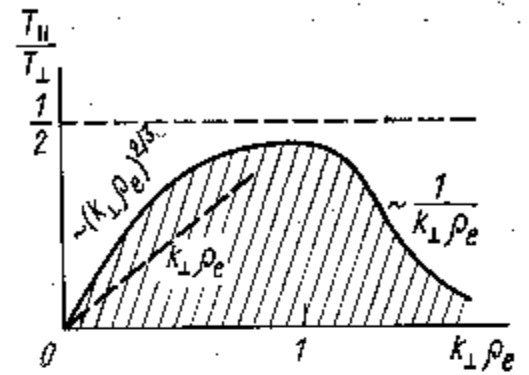


Рис. 8.4. Схематическая граница анизотропной неустойчивости гидродинамического типа. Пунктир — граница нерезонансной неустойчивости (заштрихована область неустойчивости)

§ 8.3. Кинетическая неустойчивость анизотропной плазмы

1. Необходимое условие неустойчивости анизотропной плазмы. С ростом отношения $\bar{v}_{||}^2/\bar{\varepsilon}_{\perp}$ ($\bar{\varepsilon}_{\perp} \equiv v_{\perp}^2/2$) до значений порядка единицы и больше структура дисперсионного уравнения (8.11) существенно изменяется. При этом обсуждавшееся в § 8.1 сходство анизотропных эффектов с пучковыми теряется. Если $\bar{\varepsilon}_{\perp} \leq \bar{v}_{||}^2$, а распределение частиц по поперечным скоростям является равновесным ($\partial f_{\perp}/\partial \varepsilon_{\perp} \leq 0$), то плазма устойчива. Покажем это для распределения двумаквелловского типа ($T_{\perp} \neq T_{||}$).

Предварительно получим общее условие устойчивости. Представим общее выражение для скалярной диэлектрической проницаемости (5.22) в виде

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du P(u)}{u - w}, \quad (8.41)$$

где $w = \omega/k_z$;

$$P(u, k_z, k_{\perp}) = \frac{1}{k_z} \int_0^{\infty} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{m} J_n^2(\xi) \times \\ \times \left[k_z \frac{\partial F(v_z, v_{\perp})}{\partial v_z} + n\omega_B \frac{\partial F(v_z, v_{\perp})}{\partial v_{\perp}} \right]_{v_z = \frac{u k_z - n\omega_B}{k_z}}. \quad (8.42)$$

Для определенности полагаем $k_z > 0$, так что $\text{Im } w > 0$. Функция $P(u)$ аналогична производной функции распределения в задачах о колебаниях плазмы в отсутствие магнитного поля [ср. (8.41) с (2.10)].

По аналогии с § 2.7 можно заключить, что для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы при всех $u = u_0$, при которых $P(u_0) = 0$ и $P'(u_0) > 0$, выполнялось неравенство

$$\mathcal{P} \int \frac{P(u) du}{u - u_0} \leq 0. \quad (8.43)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что плазма устойчива, если при конечных u функция $P(u)$ имеет не более одного нуля.

Используя эти общие результаты, покажем, что в случае двумаквелловского распределения функция P имеет только один нуль, если $T_{\perp} \leq T_{\parallel}$. Подставляя (2.98) в (8.42), находим, что в этом случае

$$P(u) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-z) I_n(z) \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left[- \left(\frac{k_z u - n\omega_B}{k_z v_{T_{\parallel}}} \right)^2 \right] \times \\ \times \frac{m}{T_{\parallel}} \cdot \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \left[u - \frac{n\omega_B}{k_z} \left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - 1 \right) \right]. \quad (8.44)$$

В этой сумме можно оставить только такие члены, в которых $n\omega_B$ не имеет знака, противоположного u , — все остальные члены экспоненциально малы. Тогда из (8.44) следует, что при $T_{\parallel} > T_{\perp}$ ни один из оставшихся членов суммы не обращается в нуль нигде, кроме как при $u = 0$. Это соответствует устойчивости.

С помощью (8.44) можно оценить, сколь малым должно быть необходимое для анизотропной неустойчивости отношение T_{\parallel}/T_{\perp} . Как вытекает из рассмотренного выше, для неустойчивости необходимо, чтобы при каком-нибудь n выполнялось неравенство

$$1 - \frac{n\omega_B}{k_z u} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) < 0. \quad (8.45)$$

С другой стороны, $k_z u$ не должно существенно отличаться от $n\omega_B$, так как в противном случае соответствующий член окажется экспоненциально малым по сравнению с соседним и не изменит знака всей суммы. Поэтому, наряду с (8.45), должно удовлетворяться также условие

$$\exp \left[- \left(\frac{k_z u - n\omega_B}{k_z v_{T_{\parallel}}} \right)^2 \right] \geq \exp \left[- \left(\frac{k_z u - (n-1)\omega_B}{k_z v_{T_{\parallel}}} \right)^2 \right]. \quad (8.46)$$

Из (8.45) и (8.46) следует, что величина $k_z u$ должна лежать в пределах

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_B < k_z u < n\omega_B \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right). \quad (8.47)$$

Отсюда находим, что n -й член суммы (8.44) может изменить знак всей суммы только при

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} < \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.48)$$

Поэтому необходимое условие неустойчивости имеет вид

$$T_{\parallel} < T_{\perp}/2. \quad (8.49)$$

2. Кинетическая неустойчивость. Из § 8.2 следует, что гидродинамические неустойчивости невозможны, если плотность плазмы недостаточно велика (см. рис. 8.3), либо если отношение T_{\parallel}/T_{\perp} не слишком мало (см. рис. 8.4). Рассмотрим, какую роль в этих условиях играют кинетические эффекты (взаимодействие резонансных частиц с колебаниями).

Отсутствие неустойчивых возмущений гидродинамического типа означает вещественность решений уравнения (8.30). В этом случае мнимая поправка к частоте колебаний может быть найдена с помощью общего соотношения (2.17), в которое вместо $\text{Re } \epsilon_0$ должна быть подставлена левая часть равенства (8.30), вместо ω_k — решение (8.30), в качестве $\text{Im } \epsilon_0(\omega_k)$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости, определенной уравнением (5.26).

Пусть плотность плазмы лежит в незащитываемой области рис. 8.3. Тогда частота колебаний (8.31) не достигает электронно-циклотронной частоты и неустойчивость гидродинамического типа невозможна. Инкремент кинетической неустойчивости, вычисленный указанным выше способом, равен

$$\begin{aligned} \gamma = & - \frac{\sqrt{\pi} \omega_k^2 \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}}{|k_z| v_{T\parallel} (1 - I_0 \exp(-z) + k^2 d_{\perp}^2)} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \exp(-z) \left[1 - \frac{n\omega_B}{\omega_k} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{\omega_k - n\omega_B}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.50)$$

В этой сумме важны только члены $n = 0, 1$, соответствующие черенковскому и первому циклотронному резонансам. В данном случае черенковский резонанс приводит к затуханию колебаний. Поэтому неустойчивость возможна при условии, что вклад в γ первого циклотронного резонанса не только положителен, но и превышает отрицательный вклад черенковского резонанса. Аналогичные рассуждения уже проводились в п. 1. Продолжая их, приходим к критерию неустойчивости типа (8.47), в котором следует положить $n = 1$, $k_z u = \omega_k$. Помимо условия (8.49) из (8.47) следует также, что частота колебаний не может быть слишком малой:

$$\omega_k > \omega_B/2. \quad (8.51)$$

Это означает, что кинетическая неустойчивость возможна не при сколь угодно низкой плотности плазмы, а только при такой, что

$$\omega_{pe}^2 \geq \omega_{Be}^2/4. \quad (8.52)$$

§ 8.4. Неустойчивость плазмы с немаксвелловским распределением частиц по поперечным скоростям

В приближении $V_0 = 0$ плазма с неравновесным распределением частиц по поперечным скоростям ($\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$), обладающим одним максимумом, устойчива, § 2.8. При $V_0 \neq 0$ этот вывод относится только к возмущениям с $\omega/\omega_B \rightarrow \infty$. Чтобы рассмотреть устойчивость такой плазмы относительно более низкочастотных возмущений, с $\omega \lesssim \omega_B$, необходимо исследовать дисперсионное уравнение, учитывающее влияние магнитного поля на возмущенное движение частиц. Ниже проведем это рассмотрение для наиболее простого случая возмущений, волновой вектор которых направлен поперек магнитного поля, $k_z = 0$.

Согласно (5.22), в этом случае

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\omega_B}{\omega - n\omega_B} \left\langle J_n^2(\xi) \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right\rangle. \quad (8.53)$$

Если при всех v_{\perp} $\partial F / \partial \epsilon_{\perp} \leq 0$, то соответствующие колебания не раскачиваются. В этом можно убедиться с помощью критерия Найквиста § 2.7. Действительно, согласно § 2.7, для неустойчивости необходимо, чтобы $\text{Im } \epsilon_0$ было отрицательно хотя бы при одном положительном ω . В данном случае

$$\text{Im } \epsilon_0 = - \frac{4\pi e^2 \omega}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle J_n^2(\xi) \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right\rangle \delta(\omega - n\omega_B). \quad (8.54)$$

Видно, что при $\partial F / \partial \epsilon_{\perp}$, всюду меньшем или равном нулю, и при $\omega > 0$ $\text{Im } \epsilon_0$ не отрицательно.

Рассмотрение устойчивости неравновесных распределений начнем со случая $F = n_0 \delta(\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\perp 0})$. Для такого распределения выражение (8.53) сводится к следующему:

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2 \epsilon_{\perp 0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\omega_B \xi_0 J_n(\xi_0) J_n'(\xi_0)}{\omega - n\omega_B}, \quad (8.55)$$

где

$$\xi_0 = kv_{\perp 0} / \omega_B; \quad \epsilon_{\perp 0} = v_{\perp 0}^2 / 2.$$

Дисперсионное уравнение $\epsilon_0(\mathbf{k}, \omega) = 0$ имеет решение $\omega = 0$, если

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} = \frac{\xi_0}{(J_0^2)'} \quad (8.56)$$

Соответствующие значения ξ_0 лежат в интервалах между нулями и максимумами функции J_0^2 , таких, где $(J_0^2)' > 0$. Функция $J_0(\xi)$ и удовлетворяющее условию (8.56) «критическое» значение параметра $(\omega_p/\omega_B)^2$ изображены на рис. 8.5. Минимальное значение параметра $(\omega_p/\omega_B)^2$ и соответствующее ему оптимальное ξ_0 равны:

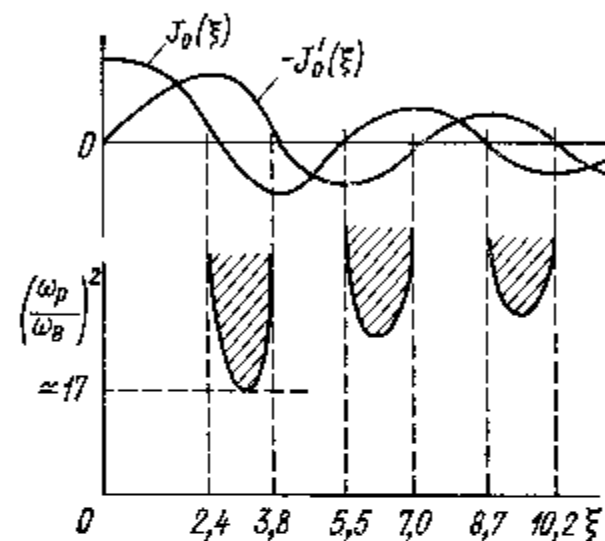


Рис. 8.5. Зоны неустойчивости (заштриховано) плазмы с δ -функциональным распределением частиц по поперечным скоростям

имеет ненулевое решение с $|\omega| \ll \omega_B$. Разлагая в (8.55) знаменатель $1/(\omega - n\omega_B)$ по малому параметру ω/ω_B , находим

$$\frac{\omega^2}{\omega_B^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{(J_n^2)'}{(J_n^2/n^2)'} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \frac{(J_0^2)'}{\xi_0} - 1 \right). \quad (8.59)$$

Члены суммы в знаменателе (8.59) быстро убывают с номером n . Оставляя только член $n = \pm 1$, имеем

$$\frac{\omega^2}{\omega_B^2} = \frac{J_0}{2J_0'} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \cdot \frac{(J_0^2)'}{\xi_0} - 1 \right), \quad (8.60)$$

При всех ξ_0 , лежащих в критических интервалах рис. 8.5 (т. е. таких, где $(J_0^2)' > 0$), отношение J_0/J_0' отрицательно. Это следует из соотношения между функцией Бесселя и ее производными

$$\frac{J_0''}{J_0} = - \left[1 + \frac{2(J_0^2)'}{\xi_0(J_0^2)'} \right]. \quad (8.61)$$

Поэтому при плотностях, превышающих критическую:

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 > \frac{\xi_0}{(J_0^2)'}, \quad (8.62)$$

плазма неустойчива, $\omega^2 < 0$.

Как видно из рис. 8.5, раскачиваться могут только возмущения с не слишком малыми ξ_0 , поскольку необходимо, чтобы ξ_0 по крайней мере превосходило первый нуль функции $J_0(\xi_0)$:

$$\xi_0 \equiv kv_{\perp 0} / \omega_B \geq 2,4. \quad (8.63)$$

С ростом параметра $(\omega_p/\omega_B)^2$ от значений (8.56) и выше инкремент неустойчивых возмущений растет и становится сравнимым с циклотронной частотой

$$\gamma \lesssim \omega_B. \quad (8.64)$$

Для плазмы с произвольным распределением частиц по скоростям вместо (8.60) имеет место уравнение

$$\left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\langle \frac{1}{\xi} (J_0^2)' \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\xi} (J_1^2)' \right\rangle} \left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \left\langle \frac{(J_0^2)'}{\xi} \right\rangle - 1 \right]. \quad (8.65)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по функции распределения, нормированной на единицу. Необходимым условием неустойчивости является

$$\langle (J_0^2)' / \xi \rangle > 0. \quad (8.66)$$

При этом условии стоящий в знаменателе (8.65) интеграл всегда отрицателен [ср. с (8.61)]:

$$\left\langle \frac{(J_1^2)'}{\xi} \right\rangle \equiv - \left[2 \left\langle \frac{(J_2^2)'}{\xi^2} \right\rangle + \left\langle \frac{(J_0^2)'}{\xi} \right\rangle \right] < 0, \quad (8.67)$$

и если плотность плазмы не слишком мала, то имеет место неустойчивость. Поэтому необходимое и достаточное условие неустойчивости можно представить в виде

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 > \frac{1}{\langle (J_0^2)' / \xi \rangle} > 0. \quad (8.68)$$

Пусть

$$F = \frac{m(T+T_1)}{2\pi T^2} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_1}\right) \right]. \quad (8.69)$$

При такой функции распределения имеем

$$\langle (J_0^2)' / \xi \rangle = - \left(1 + \frac{T_1}{T} \right) \frac{1}{z} [I_0(z_2) \exp(-z_2) - I_0(z) \exp(-z)], \quad (8.70)$$

где $z = k^2 T / m \omega_B^2$, $z_2/z = T_1 / (T + T_1)$. Это выражение отрицательно при всех z и T_1/T , так что неравенство (8.66) не выполняется. Этот пример показывает, что вовсе не каждое распределение с одним максимумом неустойчиво.

Библиографический обзор к гл. 8

1. Malmfors K. G. Unstable oscillations in an electron gas.—«Arkiv. Fys.», 1950, Bd. 1, S. 569.
Здесь был поставлен вопрос об устойчивости распределения $F \sim \delta(v_z) \delta(v_\perp - v_0)$ (§ 8.4).
2. Sen H. K. Solar «enhanced radiation» and plasma oscillations.—«Phys. Rev.», 1952, v. 88, p. 816.
Показано, что распределение типа Малмфорса неустойчиво относительно возмущений с $k_z = 0$.
3. Harris E. G. Unstable plasma oscillations in a magnetic field.—«Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 34.
Методом Найквиста (см. § 2.7) здесь был подтвержден вывод Сена о неустойчивости распределения типа Малмфорса. Анализировались также возмущения с $k_z \neq 0$.
4. Ozawa Y., Kaji I., Kito M. Stability criterion for longitudinal plasma waves in a magnetic field.—«J. Nucl. Energy», 1962, v. C4, p. 271.
Проводятся численные расчеты границы устойчивости анизотропной плазмы относительно потенциальных возмущений (§ 8.3).
5. Harris E. G. Plasma instabilities associated with anisotropic velocity distributions.—«J. Nucl. Energy», 1962, v. C2, p. 138.
Дается обзор результатов по неустойчивостям немаксвелловской плазмы.
6. Hall L. S., Heckrotte W. Stability of longitudinal oscillations in a uniform magnetized plasma with anisotropic velocity distribution.—«Phys. Rev.», 1964 v. A134, p. 1474.
Показана устойчивость плазмы с $T_\parallel > T_\perp$ относительно потенциальных возмущений.
7. Shima Ya., Hall S. Electrostatic instabilities in a plasma with anisotropic velocity distributions.—«Phys. Rev.», 1965, v. A139, p. 1115.
Показана устойчивость плазмы с $T_\perp < 2T_\parallel$ относительно потенциальных возмущений (§ 8.3).
8. Hall L. S., Heckrotte W., Kamnash T. Ion cyclotron electrostatic instabilities.—«Phys. Rev.», 1965, v. A139, p. 1117.
Обсуждаются потенциальные неустойчивости плазмы с анизо-

тропным и поперечно-немаксвелловским распределением по скоростям.

9. Dory R. D., Guest G. E., Harris E. G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field.—«Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 131.
Исследуется неустойчивость плазмы с $\partial f / \partial v_\perp > 0$ (§ 8.4).
10. Crawford F. W., Tataronis J. A. Wave propagation along a warm non-uniform plasma column.—«Intern. J. Electr.», 1965, v. 19, p. 557.
Проводится численный анализ устойчивости δ -функционального распределения.
11. Alkhaev V. V., Glagolev V. M., Morozov S. A. Anisotropic instability in a hot electron plasma contained in an adiabatic trap.—«Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 753.
Исследуется неустойчивость плазмы с анизотропными электронами.
12. Тимофеев А. В., Пистунович В. И. Циклотронная неустойчивость анизотропной плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 351.
Суммированы предшествующие и получен ряд новых результатов по устойчивости плазмы с максвелловскими электронами и немаксвелловскими ионами.
13. McCune J. E. General criterion for electrostatic plasma instabilities with uniform magnetic field.—«Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 398.
Получен общий критерий неустойчивости (§ 8.3).
14. Gruber S., Klein M. W., Auer R. L. High-frequency velocity space instabilities.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1504.
Исследуются неустойчивости плазмы с анизотропным распределением электронов.

ГЛАВА 9

ПЛАЗМА С ГРУППОЙ НЕМАКСВЕЛЛОВСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

§ 9.1. Возбуждение колебаний холодной плазмы группой быстрых частиц с анизотропным распределением по скоростям

В отличие от гл. 8 здесь будем считать, что электронная компонента плазмы состоит не из одной, а из двух групп частиц: холодных электронов и группы быстрых электронов с немаксвелловским распределением по скоростям. Исследуем раскачку собственных колебаний холодной плазмы быстрыми частицами.

Группа быстрых частиц с анизотропным распределением по скоростям ($T_{\perp} \neq T_{\parallel}$) может раскачивать колебания плазмы даже при $V = 0$. Механизм анизотропной раскачки колебаний обсуждался в § 8.1, а неустойчивость плазмы, целиком состоящей из быстрых частиц с $T_{\perp} > T_{\parallel}$, — в § 8.2 и 8.3. Теперь будем считать, что быстрые частицы составляют малую долю медленных, $\alpha \equiv n_1/n_0 \ll 1$. Покажем, что, как и в случае однокомпонентной плазмы, в такой смеси двух плазм может развиваться неустойчивость гидродинамического типа (при $T_{\parallel} \ll T_{\perp}$) или кинетическая (при сравнимых T_{\parallel} и T_{\perp}).

1. Гидродинамическая анизотропная неустойчивость. Пусть распределение быстрых частиц по скоростям сильно анизотропно, $T_{\parallel}/T_{\perp} \rightarrow 0$, а их средняя скорость равна нулю, $V = 0$. Рассмотрим взаимодействие этих частиц с холодной плотной плазмой. Исходим из дисперсионного уравнения

$$1 - \left(\frac{\omega_p \cos \theta}{\omega} \right)^2 - \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{\omega^2 - \omega_B^2} - \alpha \omega_p^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_n \exp(-z_{\perp}) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_B)^2} + \frac{n I_n \exp(-z_{\perp}) \sin^2 \theta}{z_{\perp} \omega_B (\omega - n\omega_B)} \right] = 0. \quad (9.1)$$

Оно получается с использованием формул (5.3) и (5.27). Напомним, что здесь ω_p — электронная ленгмюровская частота холодной плазмы; ω_B — циклотронная частота электронов; α — отношение плотностей быстрых и медленных частиц; $z_{\perp} = k_{\perp}^2 T_{\perp} / m \omega_B^2$, где m — масса электрона.

Учитывая анализ § 7.1, заключаем, что если только неустойчивость возможна, то максимальный инкремент возмущений должен достигаться при $\cos \theta$, соответствующем пересечению плазменных ветвей колебаний ω_1 , ω_2 с пучковыми (см. рис. 7.1). В данном случае частоты пучковых ветвей совпадают с электронно-циклотронными гармониками, $\omega = n\omega_B$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому при $n \neq 1$ пучковые ветви могут пересекаться только с ветвью ω_1 и лишь при $n = 1$ — с ветвью ω_2 . Условия пересечения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\omega_p}{n\omega_B} \right)^2 &\approx \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{n^2 - 1} \right)^{-1}, \quad n \neq 1; \\ \omega_p^2 &\approx \omega_B^2, \quad \sin^2 \theta \ll 1, \quad n = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

При этих условиях имеет место резонансная гидродинамическая неустойчивость с инкрементом:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &\approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\alpha I_n \exp(-z_{\perp}) \cos^2 \theta}{2} \right)^{1/3} n\omega_B, \quad n \neq 1; \\ \gamma &\approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\alpha}{2} I_1 \exp(-z_{\perp}) \right)^{1/3} \omega_B, \quad n = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Возмущения с $n = 1$ и $z_{\perp} \simeq 1$ раскачиваются только при $\sin \theta < \alpha^{1/3}$. При плотности, большей, чем по условию (9.2), развивается нерезонансная неустойчивость. Ее инкремент порядка

$$\gamma \simeq \alpha^{1/2} \omega_B. \quad (9.4)$$

2. Кинетическая анизотропная неустойчивость. При конечном отношении T_{\parallel}/T_{\perp} вклад быстрых частиц в (9.1) представляется правой частью (5.26), так что в этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\equiv 1 - \left(\frac{\omega_p \cos \theta}{\omega} \right)^2 - \frac{(\omega_p \sin \theta)^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{1}{(kd_{\parallel})^2} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-z_{\perp}) I_n \left\{ 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - \frac{n\omega_B}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] W[(\omega - n\omega_B)/|k_z| v_{T\parallel}] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Отсюда находим, что неустойчивость с инкрементом (9.3) имеет место, если

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} < \begin{cases} \alpha^{2/3}, & n > 1; \\ \alpha^{4/3}, & n = 1. \end{cases} \quad (9.6)$$

Для нерезонансной неустойчивости необходимо

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} < \begin{cases} \alpha, & n < 1; \\ \alpha^2, & n = 1. \end{cases} \quad (9.7)$$

Видно, что условия на малость T_{\parallel}/T_{\perp} при $n = 1$ более жесткие, чем в случае $n > 1$.

Если условие (9.6) нарушено, то развивается кипетическая неустойчивость. Ее инкремент

$$\gamma = -\frac{2\sqrt{\pi}\alpha\omega_p^2}{v_{T\perp}^2 k^2 |k_z|} \left\{ \frac{1}{\partial \text{Re } \epsilon_0 / \partial \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \exp(-z_{\perp}) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\left(\frac{\omega - n\omega_B}{k_z v_{T\perp}} \right)^2 \right] \left[\omega - n\omega_B \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \right\}_{\omega=\omega_{1,2}} \quad (9.8)$$

При условиях, близких к (9.2) (с $n > 1$), и

$$\alpha^{2/3} < T_{\parallel}/T_{\perp} < 1/2 \quad (9.9)$$

из (9.8) по порядку величины следует:

$$\gamma \simeq \alpha\omega_B T_{\perp}/T_{\parallel} \quad (n > 1). \quad (9.10)$$

При $T_{\parallel}/T_{\perp} \simeq \alpha^{2/3}$ выражения (9.3) и (9.10) по порядку величины совпадают. Ограничение $T_{\parallel}/T_{\perp} < 1/2$ вытекает из соображений, изложенных в § 8.3.

Теперь рассмотрим возмущения с $\omega \simeq \omega_B$. При условии $|\omega/\omega_B - 1| < \text{ctg } \theta$ и $T_{\parallel}/T_{\perp} < 1/2$ из (9.5) находим

$$\gamma = -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \cdot \frac{I_1 \exp(-z_{\perp})}{z_{\perp}} \cdot \frac{(\omega - \omega_B)^2}{\omega_B |k_z| v_{T\parallel}} \times \\ \times \left[\omega - \omega_B \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \exp \left[-\left(\frac{\omega - \omega_B}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (9.11)$$

Видно, что $\gamma > 0$, если

$$\frac{\omega}{\omega_B} < 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}. \quad (9.12)$$

Возмущения с $|\omega| < |\omega_B|$, удовлетворяющие условиям $|\omega - \omega_B| \ll \omega_B$, существуют только в плазме с $\omega_p \gg \omega_B$ и только при $\sin \theta \ll 1$ (ветвь ω_2 , см. § 6.1). Неустойчивость возможна не только при $\omega_p \simeq \omega_B$, но и при существенно отличных $\omega_p > \omega_B$.

Из соображений, аналогичных § 8.3, находим, что интервал частот возбуждаемых колебаний ограничен снизу условием $\omega_2 > \omega_B/2$, а возбуждение возможно только при $T_{\parallel}/T_{\perp} < 1/2$. Инкремент колебаний по порядку величины равен (9.10).

§ 9.2. Пучково-анизотропная неустойчивость

При взаимодействии с плазмой группы быстрых частиц, у которых $T_{\perp} > T_{\parallel}$, $V \neq 0$, могут развиваться неустойчивости, представляющие собой своеобразный гибрид пучковых и анизотропных неустойчивостей. Их инкременты больше, чем при $T_{\perp} = T_{\parallel}$, $V \neq 0$ либо при $T_{\perp} > T_{\parallel}$, $V = 0$. Рассмотрим некоторые примеры таких неустойчивостей.

1. Раскачка колебаний холодной плазмы анизотропным пучком малой плотности. Пусть через холодную плазму проходит пучок малой плотности с $T_{\parallel} = 0$. Колебания такой системы описываются дисперсионным уравнением, аналогичным (9.1), но с заменой в пучковом члене $\omega \rightarrow \omega - k_z V$:

$$\epsilon_0 \equiv 1 - \frac{\omega_p^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_B^2} - \alpha\omega_p^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \times \\ \times \left[\frac{I_n \exp(-z_{\perp}) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_B - k_z V)^2} + \frac{n I_n \exp(-z_{\perp}) \sin^2 \theta}{z_{\perp} \omega_B (\omega - n\omega_B - k_z V)} \right] = 0. \quad (9.13)$$

В отличие от § 9.1, сносные ветви $\omega = n\omega_B + k_z V$ могут пересекаться с обеими ветвями собственных колебаний плазмы $\omega_{1,2}$ и при любом отношении ω_p/ω_B . Картина ветвей аналогична изображенной на рис. 7.1. Однако она отличается от рис. 7.1 наличием сносных ветвей с $n > 1$, а также тем, что все сносные ветви — сдвоенные: дисперсионное уравнение в пределе $\alpha \rightarrow 0$ имеет по два решения $\omega = k_z V + n\omega_B$. Поэтому при конечном α каждое из пересечений ветвей соответствует неустойчивости. Максимальный инкремент колебаний определяется формулой, аналогичной (7.10):

$$\gamma_{1,2}^{(n)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha^{1/3} \left(\frac{\omega_p^2 \cos^2 \theta I_n \exp(-z_{\perp})}{\partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega} \right)_{\substack{\omega=\omega_{1,2} \\ k_z=k_{z1,2}^{(n)}}}, \quad (9.14)$$

где $k_{z1,2}^{(n)}$ удовлетворяет соотношению

$$k_{z1,2}^{(n)} = (\omega_{1,2} - n\omega_B)/V. \quad (9.15)$$

Анализ (9.14) и (9.15) производится аналогично § 7.1 и 7.2. В качестве примера рассмотрим раскачку первым циклотронным резонансом ($n = 1$) низкочастотной ветви $\omega = \omega_2$ в плазме с $\omega_p \ll \omega_B$. В этом случае $k_{z2} \approx \omega_B/V$, а инкремент

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\alpha I_1 \exp(-z_1)}{2} \right)^{1/3} \omega_p \cos \theta. \quad (9.16)$$

Согласно (9.16) и (7.30), при $v_{T1} > V$ инкремент пучково-анизотропной неустойчивости превосходит пучковый в $(\omega_B/\omega_p \alpha^{1/3})^{1/2}$ раз.

Применимость формулы (9.14) ограничена условием $\gamma > k_z v_{T1}$. Если это условие не выполнено, то пучково-анизотропная неустойчивость становится кинетической, а ее инкремент определяется взаимодействием резонансных частиц с волной. Стояностью до переобозначения $\omega \rightarrow \omega - k_z V$ инкремент в этом случае дается формулой (9.8).]

2. Раскачка электронно-циклотронных колебаний в плазме, состоящей из двух встречных анизотропных потоков. Пусть электронная компонента плазмы состоит из двух равноплотных потоков $n_1 = n_2 \equiv n_0$, движущихся навстречу друг другу, $V_2 = -V_1 \equiv -V$, и таких, что $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$. Будем полагать плотность потоков достаточно малой, $\omega_p \ll \omega_B$, и рассмотрим их циклотронно-циклотронное взаимодействие (ср. с § 7.2).

Исходим из дисперсионного уравнения

$$1 - \omega_p^2 I_n \exp(-z_{\perp}) \cos^2 \theta \left[\frac{1}{(\omega - n\omega_B - k_z V)^2} + \frac{1}{(\omega - n\omega_B + k_z V)^2} \right] = 0. \quad (9.17)$$

Оно аналогично уравнению (1.39). Используя результаты п. 1 § 1.5, находим, что уравнение (9.17) имеет решения с $\text{Im } \omega > 0$, причем

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &\approx n\omega_B; \\ \gamma_{\text{макс}} &= \frac{\omega_p}{2} \cos \theta (I_n \exp(-z_{\perp}))^{1/2}; \\ k_{z \text{ опт}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\omega_p}{V} (I_n \exp(-z_{\perp}))^{1/2} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Пренебрежение продольным тепловым разбросом частиц в пучках законно, если

$$v_{T1} < V. \quad (9.19)$$

В зависимости от k_{\perp} инкремент максимален при $k_{\perp} \rho_{\perp} \simeq 1$. Для возмущений с $k_{\perp} \simeq k_z$ это условие означает

$$v_{T1}/V \simeq \omega_B/\omega_p \gg 1. \quad (9.20)$$

Из (9.19) и (9.20) следует, что плазма, в которой может развиваться рассматриваемая неустойчивость, должна быть сильноанизотропной:

$$T_{\parallel}/T_{\perp} \ll (\omega_p/\omega_B)^2. \quad (9.21)$$

Из сравнения инкрементов (9.18) и (7.27) видно, что пучково-анизотропная раскачка электронно-циклотронных колебаний должна происходить быстрее, чем пучковая раскачка при $T_{\parallel} = T_{\perp}$.

§ 9.3. Возбуждение колебаний плазмы группой быстрых частиц с неравновесным распределением по поперечным скоростям

В § 9.1 было показано, что быстрые частицы с $V = 0$ раскачивают колебания холодной плазмы, если их поперечная энергия велика по сравнению с продольной, $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Теперь покажем, что раскачка колебаний частицами с $V = 0$ возможна и при $\bar{v}_{\perp}^2/2 \simeq v_{\parallel}^2$, если распределение частиц по поперечным скоростям неравновесно, $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$. Этот эффект аналогичен рассмотренной в § 8.4 неустойчивости однокомпонентной плазмы с $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$.

Ограничимся анализом возмущений с $k_z = 0$. С помощью формул (5.3) и (5.22) находим, что такие возмущения описываются дисперсионным уравнением

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} - \alpha \omega_p^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \left\langle 2 \frac{J_n J'_n}{\xi} \right\rangle}{\omega_B (\omega - n\omega_B)} = 0. \quad (9.22)$$

1. Раскачка электронно-циклотронных гармоник. Частота собственных колебаний плазмы $\omega_1 = (\omega_p^2 + \omega_B^2)^{1/2}$ близка к $n\omega_B$ ($|n| > 1$), если плотность и магнитное

поле связаны соотношением [ср. с (9.2)]:

$$(\omega_p/\omega_B)^2 = n^2 - 1, \quad |n| > 1. \quad (9.23)$$

Пучок приводит к раскачке колебаний плазмы такой плотности, если

$$\langle J_n J'_n | \xi \rangle < 0. \quad (9.24)$$

При условии (9.23) инкремент n -й гармоники равен

$$\gamma = \alpha^{1/2} \frac{\omega_p^2}{\omega_B} \sqrt{-\left\langle \frac{J_n J'_n}{\xi} \right\rangle}. \quad (9.25)$$

Условие неустойчивости (9.24) удовлетворяется для более широкого класса неравновесных распределений, чем в случае однокомпонентной плазмы [ср. (9.24) с (8.66)]. В частности, колебания могут раскачиваться быстрыми частицами с распределением типа (8.69)

$$F = \frac{m(T+T_1)}{2\omega T^2} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_1}\right)\right],$$

тогда как однокомпонентная плазма с такой функцией распределения устойчива.

Отметим, что минимальный номер раскачиваемых циклотронных гармоник равен двум, т. е. колебания с частотой $\omega \approx \omega_B$ не раскачиваются.

2. Раскачка высокочастотных колебаний с $\gamma > \omega_B$ при $\alpha > \omega_B/\omega_p$. При $\omega_p \gg \omega_B$ номер неустойчивой гармоники велик, $n \gg 1$. В этом случае инкремент неустойчивости по порядку величины равен

$$\gamma \simeq \alpha^{1/2} \omega_p. \quad (9.26)$$

При $\alpha \gg (\omega_B/\omega_p)^2$ из (9.26) следовало бы $\gamma \gg \omega_B$. В этом случае, однако, заметный вклад в инкремент дают сразу несколько гармоник, так что рассмотрение только одной гармоники незаконно. Учет многих гармоник можно, перейдя к приближению непрерывного спектра (см. § 5.5). При этом из (9.22) следует

$$\epsilon_0 \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} - \frac{\alpha \omega_p^2}{k^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \left(1 - \frac{\omega}{[\omega^2 - (kv_{\perp})^2]^{1/2}}\right) \right\rangle = 0. \quad (9.27)$$

В случае δ -функционального распределения, $F \sim \delta(v_{\perp} - v_0)$, это означает

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{i\alpha \omega_p^2 \omega}{[(k_{\perp} v_0)^2 - \omega^2]^{3/2}} = 0. \quad (9.28)$$

Максимальный инкремент достигается при $kv_0 \approx \omega_p$, причем функционально он несущественно отличается от (9.26):

$$\gamma \simeq \alpha^{2/5} \omega_p, \quad (9.29)$$

хотя, в силу предположения $\alpha > \omega_B/\omega_p$, он превосходит ω_B .

Высокочастотные возмущения с $\gamma > \omega_B$ могут раскачиваться не только при δ -функциональном, но и при всяком другом $F(\epsilon_{\perp})$, если соответствующая одномерная функция

$$f_0(v_x) \equiv \int F(\epsilon_{\perp}) dv_y$$

имеет при малых v_x положительную производную, $df_0/dv_x > 0$. Из-за наличия холодной компоненты плазмы полная одномерная функция распределения имеет достаточно глубокий минимум и в соответствии с § 2.7 и 2.8 относится к классу неустойчивых.

Библиографический обзор к гл. 9

1. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О прохождении пучка заряженных частиц через магнитоактивную плазму.—В сб.: Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1963, с. 144. Исследуются неустойчивости пучка, распределение по скоростям которого близко к δ -функциональному (§ 9.1—9.3).
2. Hall L. S., Peckrotte W., Kamash T. Ion cyclotron electrostatic instabilities.—«Phys. Rev.», 1965, v. A139, p. 1117.
3. Jungwirth K. Electron-cyclotron instability.—«Czech. J. Phys.», 1967, v. B17, p. 498.
4. Шевченко В. И. Взаимодействие пучка электрических осцилляторов с плазмой в магнитном поле.—В сб.: Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1963, с. 156. В работах [2—4] обсуждается раскачка колебаний плазмы группой электронов с немаксвелловским распределением по поперечным скоростям (§ 9.3).
5. Jungwirth K., Preinhaelter J. Cyclotron instabilities of a two component electron plasma.—«Czech. J. Phys.», 1966, v. B16, p. 228.

Исследуется циклотронная неустойчивость встречных потоков электронов с анизотропным распределением по скоростям (§ 9.2).

6. Михайловский А. Б., Юнгвирт К. О роли конвективных эффектов при возбуждении электронных колебаний плазмы неоднородным электронным пучком. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 777.

Исследуются раскачка колебаний плазмы азимутальным электронным потоком, а также раскачка колебаний плазмы пространственно-неоднородным потоком с немаксвелловским распределением по скоростям (§ 9.1—9.3).

7. Seidl M., Šunka P. High frequency instabilities in beam-generated plasma. — «Nucl. Fusion», 1967, v. 7, p. 237.

Обсуждается раскачка колебаний плазмы пучком с немаксвелловским распределением по скоростям (§ 9.1—9.3).

8. Jungwirth K. Plasma instabilities excited by an azimuthal electron beam. — «Czech. J. Phys.», 1968, v. 18, p. 629.

Исследуется неустойчивость азимутального электронного потока.

9. Shimizu K. e.a. High frequency electrostatic instabilities in a plasma with a small fraction of hot electrons. — «J. Phys. Soc. Japan.», 1974, v. 37, p. 460.

Рассматривается неустойчивость группы быстрых электронов с распределением конусного типа.

ГЛАВА 10

ПЛАЗМА С ПРОДОЛЬНОМ ТОКОМ

§ 10.1 Плазма с большой токовой скоростью в слабом магнитном поле

Относительное движение электронной и ионной компонент — ток в плазме — может быть причиной некоторых неустойчивостей плазмы. Эти неустойчивости в пренебрежении статическим полем обсуждались: в § 1.6 — неустойчивость Бунемана, в § 3.4 — ионно-звуковая неустойчивость.

Пусть токовая скорость превышает тепловую электронную ($V > v_{Te}$), а магнитное поле не слишком велико, $\omega_{pe} > \omega_{Be}$. В этом случае справедливы результаты § 1.6, согласно которым в плазме должна иметь место гидродинамическая неустойчивость типа Бунемана с инкрементом

$$\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/3} \omega_{pe} \quad (10.1)$$

и продольным волновым числом

$$|k_z| = \omega_{pe}/V. \quad (10.2)$$

Вещественная часть частоты нарастающих возмущений порядка инкремента

$$\text{Re } \omega \simeq (m_e/m_i)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (10.3)$$

Обобщением дисперсионного уравнения (1.60) на случай конечных ω_{Be}/ω_{pe} является следующее:

$$1 - \frac{(\omega_{pe} \cos \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2} - \frac{(\omega_{pe} \sin \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2 - \omega_{Be}^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 = 0. \quad (10.4)$$

В нулевом приближении по параметру m_e/m_i ненулевые корни (10.4) — это сдвинутые на $k_z V$ электронные ветви $\omega_{1,2}$ [см. (6.2)]. Взаимодействие электронов с ионами приводит к раскачке этих ветвей колебаний, причем максимум инкремента достигается при условии

$$k_z = -\omega_{1,2}/V. \quad (10.5)$$

В пределе больших ω_{pe}/ω_{Be} инкремент ветви ω_1 дается формулой (10.1), а инкремент ветви ω_2 равен

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\right)^{1/3} \omega_{Be}. \quad (10.6)$$

При $\omega_{pe} \simeq \omega_{Be}$ оба инкремента одного порядка.

§ 10.2. Плазма с большой токовой скоростью в сильном магнитном поле

Пусть, как и в § 10.1, $V > v_{Te}$, но $\omega_{pe} \ll \omega_{Be}$ — случай сильного магнитного поля. Частота ветви ω_1 при этом близка к циклотронной, $\omega_1 \approx \omega_{Be}$, а резонансное k_z равно:

$$k_z^{(1)} = \omega_{Be}/V. \quad (10.7)$$

Как следует из (10.4), эта ветвь раскачивается с инкрементом

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\omega_{pe} \sin^2 \theta}{\omega_{Be}}\right)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (10.8)$$

Необходимо, однако, иметь в виду, что раскачка электроно-циклотронных колебаний весьма чувствительна к тепловому разбросу электронов по скоростям: необходи-

мо выполнении неравенства

$$\frac{v_{Te}}{V} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right)^{4/3}. \quad (10.9)$$

Раскачка ветви ω_2 при большом ω_{Be} описывается дисперсионным уравнением

$$1 - \left(\frac{\omega_{pe} \cos \theta}{\omega - k_z V}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 = 0. \quad (10.10)$$

При $\cos \theta > (m_e/m_i)^{1/2}$ это уравнение можно исследовать методом последовательных приближений, считая ионный вклад малым. Тогда получаем, что неустойчивость имеет место при

$$k \leq \omega_{pe}/V. \quad (10.11)$$

Отсюда следует, что в пространственно-ограниченной плазме развитие неустойчивости невозможно, если плотность плазмы слишком мала. В случае длинной плазмы, $k_z \ll k_\perp$, условие (10.11) означает

$$\omega_{pe}^2 \gg (k_\perp V)^2 \gg (V\pi/a_\perp)^2, \quad (10.12)$$

a — поперечный размер. Это условие можно записать как ограничение на ток, при котором возможно развитие неустойчивости

$$j_0 \equiv en_0 V \gg \frac{V^3}{4\pi e} \left(\frac{\pi}{a_\perp}\right)^2. \quad (10.13)$$

Если условие неустойчивости (10.11) выполнено, то нарастание возмущений во времени должно происходить с инкрементом

$$\gamma = \frac{V\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \cos \theta \omega_{pe}. \quad (10.14)$$

Такого же порядка будет и $\text{Re } \omega$.

В случае $\cos \theta \ll (m_e/m_i)^{1/2}$ критерий неустойчивости имеет вид [ср. с (1.58)]

$$k_\perp^2 < \frac{\omega_{pe}^2}{V^2} \left[1 + \left(\frac{m_e}{m_i \cos^2 \theta}\right)^{1/3}\right]^3. \quad (10.15)$$

Отсюда следует, что при достаточно большой длине плазмы может иметь место неустойчивость, даже если условие (10.13) не удовлетворяется.

§ 10.3. Раскачка током высокочастотных ионно-звуковых колебаний

При малой токовой скорости, $v_{Ti} \ll V < v_{Te}$ и $T_e \gg T_i$ может раскачиваться ветвь высокочастотных ионно-звуковых колебаний, см. § 6.3. В случае $k_\perp = 0$ магнитное поле не влияет на эту неустойчивость, и она описывается соотношениями § 3.4. Теперь будем считать $k_\perp \simeq k_z$.

В приближении холодных ионов и $\omega \gg \omega_{Bi}$ имеем дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left\{ 1 + iV\pi \frac{\omega - k_z V}{|k_z| v_{Te}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z_e) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-z_e - \left(\frac{\omega - n\omega_{Be} - k_z V}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \right\} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 = 0. \quad (10.16)$$

Учитывая, что характерные k порядка ω_{pe}/v_{Te} , заключим, что в случае слабого магнитного поля, $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$, можно считать $z_e \gg 1$, $k_z v_{Te} \gg \omega_{Be}$. Тогда можно просуммировать ряд и убедиться, что магнитное поле из (10.16) выпадает и это уравнение сводится к рассмотренному в § 3.4.

При $\omega_{Be} \gg \omega_{pe}$ в сумме (10.16) важен только член с $n = 0$. В этом случае инкремент равен

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \times \\ \times \frac{k[V(1 + k^2 d_e^2)^{1/2} - (\cos \theta)^{-1} (T_e/m_i)^{1/2}]}{(1 + k^2 d_e^2)^2}. \quad (10.17)$$

Он больше, чем при $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$, на множитель $1/\cos \theta$. Инкремент (10.17) положителен, если

$$V > V_{кр} = (T_e/m_i)^{1/2} / \cos \theta (1 + k^2 d_e^2)^{1/2}. \quad (10.18)$$

Если это неравенство сильное, то γ не зависит от $\cos \theta$. Максимум γ порядка $(m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pi}$, как и в случае $B_0 = 0$.

§ 10.4. Раскачка высокочастотных ионно-звуковых колебаний убегающими электронами

Пусть в плазме имеется группа электронов со скоростями $v_1 > v_{Te}$ и функцией распределения в виде плато [уравнение (7.58)]. При $\omega_{pe} \ll \omega_{Be}$ эти электроны могут раскачивать колебания ветви $\omega_2 = \omega_{pe} \cos \theta$, если их скорость такова, что $v_1/v_{Te} > \omega_{Be}/\omega_{pe}$, [условие (7.65)]. Предположим, что условие (7.65) не удовлетворяется, так что

$$1 < v_1/v_{Te} \ll \omega_{Be}/\omega_{pe}. \quad (10.19)$$

Если $T_e \gg T_i$, то в этом случае быстрые электроны могут раскачивать высокочастотные ионно-звуковые колебания. Дисперсионное уравнение, описывающее такого рода раскачку, имеет вид [ср. с (7.59)]

$$1 + \frac{1}{(kd_e)^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 + i\pi\alpha \frac{(\omega_{pe} \sin \theta)^2}{2\omega_{Be} |k_z| v_1} = 0. \quad (10.20)$$

Мнимый член в этом уравнении обусловлен циклотронным резонансом с волной быстрых электронов. Условие этого резонанса при $\omega \ll \omega_{Be}$ означает $v_z = \omega_{Be}/k_z$. Поскольку ионно-звуковым колебаниям соответствуют $k_z \simeq \omega_{pe}/v_{Te}$, то скорость резонансных частиц порядка $v_z \simeq (\omega_{Be}/v_{pe}) \times v_{Te}$, что не противоречит условию (10.19). Инкремент нарастающих возмущений порядка

$$\gamma \simeq \alpha \omega_{pi} (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2. \quad (10.21)$$

§ 10.5. Ионно-циклотронная неустойчивость

В случае $V \neq 0$ в плазме могут раскачиваться ионно-циклотронные колебания, рассмотренные при $V = 0$ в п. 5 § 6.4. При не слишком малых T_e/T_i и $\cos \theta > v_{Ti}/v_{Te}$ эти колебания имеют фазовую скорость, малую по сравнению с тепловой электронной, $\omega/k_z < v_{Te}$, и поэтому неустойчивость возможна, даже если $V < v_{Te}$, как и в случае ионно-звуковых колебаний. В отличие от ионно-звуковой неустойчивости требование малости T_i/T_e для раскачки циклотронных колебаний не обязательно.

При $\omega/k_z \ll v_{Te}$ вещественная часть частоты циклотронных колебаний определяется формулой (6.52). Инкремент находим с помощью соотношения (2.17), подставляя в него $\text{Re } \epsilon_0$ в форме (6.54) и $\text{Im } \epsilon_0 = \text{Im } \epsilon_0^{(e)} + \text{Im } \epsilon_0^{(i)}$, где $\text{Im } \epsilon_0^{(e)} = \sqrt{\pi} (kd_e)^{-2} (\omega - k_z V) / |k_z| v_{Te}$, а $\text{Im } \epsilon_0^{(i)}$ дается выражением (6.55):

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \Delta^2}{|k_z| v_{Te}} \cdot \frac{T_i}{T_e} \left\{ 1 - \frac{k_z V}{n \omega_{Bi}} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times I_n(z_i) \exp(-z_i) \exp\left[-\left(\frac{\Delta_0}{k_z v_{Ti}}\right)^2 - 1\right] \right\}. \quad (10.22)$$

Здесь, как и в (6.56), $\Delta = \text{Re } \omega - n \omega_{Bi}$; $\Delta_0 = \lim_{T_i/T_e \rightarrow 0} \Delta$.

Инкремент положителен при

$$V > V_{кр} \equiv \frac{n \omega_{Bi}}{k_z} \left\{ 1 + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times I_n(z_i) \exp(-z_i) \exp\left[-1 - \left(\frac{\Delta_0}{k_z v_{Ti}}\right)^2\right] \right\}. \quad (10.23)$$

Численный расчет критической скорости, минимизированной по k_z и z_i , произвели Ломипадзе и Степанов. Результаты численного расчета показывают, что в плазме с $T_e \simeq T_i$ колебания раскачиваются при условии, что направленная скорость V не намного меньше тепловой электронной.

Ионно-звуковая неустойчивость в этих условиях, однако, вообще отсутствует.

§ 10.6. О раскачке низкочастотных ионно-звуковых колебаний

В плазме с током может раскачиваться также ветвь низкочастотных ионно-звуковых колебаний $\omega_5 = k_z (T_e/m_i)^{1/2}$ (§ 6.3). Если парные столкновения между частицами несущественны, то инкремент этих колебаний пропорционален производной df_{0e}/dv_z . При этом он мал по сравнению с инкрементом высокочастотных ионно-звуковых колебаний:

$$\frac{\gamma_{н.ч.}}{\gamma_{в.ч.}} \approx \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}}. \quad (10.24)$$

В этих условиях раскачка низкочастотных ионно-звуковых колебаний реально может не проявляться, так как

вследствие быстрой раскачки высокочастотных ионо-звуковых колебаний произойдет релаксация электронной функции распределения, и производная $\partial f_{0e}/\partial v_z$ ни при каких v_z не будет положительной.

Библиографический обзор к гл. 10

1. Bernstein I. V. et al. Ion wave instabilities.—«Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 136.
Обсуждается низкочастотная ионно-звуковая неустойчивость (§ 10.6).
2. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. Anomalous diffusion arising from microinstabilities in a plasma.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 1507.
Показано, что продольный ток может возбуждать ионо-циклотронные колебания (§ 10.5).
3. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. П. Возбуждение низкочастотных продольных колебаний плазмы в магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1823.
Исследуются неустойчивости в плазме с продольным током — циклотронные и низкочастотные (§ 10.5, 10.6).
4. Степанов К. П. О неустойчивости продольных колебаний плазмы, находящейся в сильном электрическом и магнитном полях.— В сб.: Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1963, с. 164.
Исследуется неустойчивость плазмы, электроны которой движутся относительно ионов вдоль B_0 со скоростью $V > v_{Te}$ (§ 10.1, 10.2).
5. Рудаков Л. И., Кораблев Л. В. Квазилинейная теория неустойчивости тока в плазме.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 50, с. 220.
Обсуждается высокочастотная ионно-звуковая неустойчивость (§ 10.3).
6. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Электропроводность плазмы в сильном магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 2025.
Исследуется раскачка высокочастотных ионно-звуковых колебаний убегающими электронами (§ 10.4).
7. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. П. О возбуждении магнитозвуковых волн в сталкивающихся плазменных потоках.—«Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 148.
Рассматривается вопрос о возбуждении магнитозвуковых волн при столкновении двух равноплотностных плазменных потоков, движущихся вдоль магнитного поля.
8. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. П. Об устойчивости двух сталкивающихся потоков плазмы в магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 205. Обсуждается возбуждение электростатических (ионно-звуковых) колебаний при столкновении равноплотностных плазм, движущихся навстречу друг другу вдоль магнитного поля.

ГЛАВА 11

ПЛАЗМА С ПОПЕРЕЧНЫМ ТОКОМ

§ 11.1. Введение

В этой главе рассмотрим неустойчивости плазмы, в которой имеется относительное движение ионов и электронов поперек магнитного поля. Следует иметь в виду, что в случае строго однородной и стационарной плазмы относительное движение ионов и электронов поперек магнитного поля невозможно, — стационарная функция каждого сорта частиц в системе покоя плазмы имеет вид $f_0(v) = F(v_{\perp}^2/2, v_z)$, см. § 5.2. Поэтому следующее рассмотрение относится к квазистационарному состоянию плазмы в магнитном поле или к слабо неоднородной плазме цилиндрической симметрии, находящейся в радиальном электрическом поле. При этом неоднородностью и нестационарностью параметров плазмы и магнитного поля пренебрегаем. Такая постановка задачи оправдывается в случае, когда инкремент исследуемых возмущений превышает циклотронную частоту ионов, $\gamma > \omega_{ni}$. Это условие в дальнейшем предполагается выполненным.

Для определенности будем использовать систему координат, в которой средняя скорость электронов поперек магнитного поля отсутствует, т. е. полагаем, что поперечный ток обусловлен движением ионов. Скорость ионов будем считать направленной по оси y , $V \parallel y$.

Вклад ионов в дисперсионное уравнение для исследуемых нами электростатических возмущений можно найти, используя результаты гл. 5, если в соответствующих выражениях этой главы сделать замену $\omega \rightarrow \omega - k_y V$.

§ 11.2. Неустойчивость холодной плазмы

В этом параграфе примем, что все ионы движутся относительно электронов. Скорость ионной компоненты полагаем равной V .

В пренебрежении тепловыми эффектами возмущения такой плазмы описываются дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{De}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_y V)^2} = 0. \quad (11.1)$$

Отсюда находим, что при $\cos \theta \simeq (m_e/m_i)^{1/2}$, когда «эффективные» плотности электронов и ионов одного порядка, возмущения нарастают с инкрементом

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_{pi} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2} \quad (11.2)$$

Волновое число k_y при этом порядка $\omega_{pi}/V (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}$.

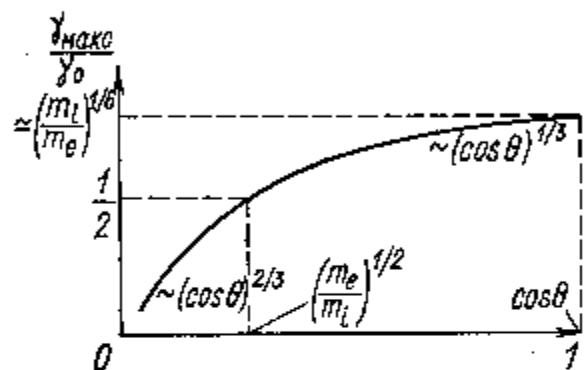


Рис. 11.1. Зависимость $\gamma_{\text{макс}} - \gamma_{\text{макс}}(\cos \theta)$ при неустойчивости относительного поперечного движения холодных ионов и холодных электронов. Здесь $\gamma_0 \equiv \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{-1/2}$

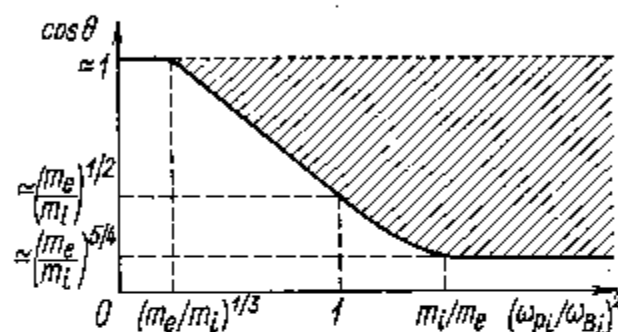


Рис. 11.2. Область $\cos \theta$, для которой $\gamma > \omega_{Bi}$ (заштриховано)

Температурой частиц в этих возмущениях можно пренебрегать, если

$$v_{Ti} < V, \quad (11.3)$$

$$(T_e/m_i)^{1/2} < V. \quad (11.4)$$

Возмущения с $\cos \theta \gg (m_e/m_i)^{1/2}$ характеризуются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &\simeq k_y \text{онт} V \simeq \omega_{pe} \cos \theta \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2}; \\ \gamma_{\text{макс}} &\simeq (m_e/m_i)^{1/3} \cos \theta^{-2/3} \text{Re } \omega. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Инкремент (11.5) больше, чем (11.2). Однако возмущения с большими $\cos \theta$ могут раскачиваться только при достаточно малом тепловом разбросе ионов и электронов [ср. с (11.3) и (11.4)]:

$$v_{Ti}/V < (m_e/m_i \cos^2 \theta)^{1/3}; \quad (11.6)$$

$$T_e/m_i V^2 < m_e/m_i \cos^2 \theta. \quad (11.7)$$

Зависимость инкремента от $\cos \theta$ качественно представлена на рис. 11.1.

Возмущения с $\gamma > \omega_{Bi}$, как следует из (11.2) и (11.5), возможны только при не слишком малой плотности плазмы. Область $\cos \theta$, соответствующая возмущениям с $\gamma > \omega_{Bi}$, в зависимости от параметра $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$ представлена на рис. 11.2.

§ 11.3. Раскачка электронно-звуковых колебаний в плазме с горячими ионами

Как следует из (11.6), наиболее существенно тепловой разброс ионов влияет на возбуждение колебаний с максимальным $\cos \theta$. В частности, гидродинамическая неустойчивость при $\cos \theta \simeq 1$ невозможна, если $v_{Ti}/V \gg (m_e/m_i)^{1/3}$. Кинетический инкремент при $(m_e/m_i)^{1/3} < v_{Ti}/V < 1$ по порядку величины равен

$$\gamma_{\text{кин}} \simeq (m_e/m_i \cos^2 \theta)^{1/2} (V/v_{Ti})^2 \omega_{pi} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2}. \quad (11.8)$$

Это выражение справедливо при $\cos \theta$, удовлетворяющих условию, обратному (11.6). При заданном V/v_{Ti} максимальным инкрементом обладают гидродинамически неустойчивые возмущения с максимальным $\cos \theta$, т. е. с

$$\cos \theta \simeq (m_e/m_i)^{1/2} (V/v_{Ti})^{3/2}. \quad (11.9)$$

По порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \omega_{pi} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2} (V/v_{Ti})^{1/2}. \quad (11.10)$$

Поперечное волновое число k_y определяется формулой (11.5).

В случае $v_{Ti}/V \simeq 1$ все возмущения с $\cos \theta > (m_e/m_i)^{1/2}$ неустойчивы только кинетически. Их инкремент меньше, чем при $\cos \theta \simeq (m_e/m_i)^{1/2}$; последний при $v_{Ti} \simeq V$ по порядку величины все еще равен (11.2).

Пусть теперь $v_{Ti} > V$. В этом случае при любых $\cos \theta$ возможна только кинетическая неустойчивость. Она описывается дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{(k d_i)^2} \left(1 + i V \pi \frac{\omega - k_y V}{|k| v_{Ti}} \right) = 0. \quad (11.11)$$

Раскачивается ветвь электронно-звуковых колебаний с частотой $\omega = \omega_0$, где ω_0 определено уравнением (6.47). Максимальный инкремент возмущений порядка

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \omega_{pi} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{V}{v_{Ti}} \right)^2. \quad (11.12)$$

Этим возмущениям соответствует

$$\cos \theta \simeq \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{V}{v_{Ti}}. \quad (11.13)$$

Поперечное волновое число порядка $k_{\perp} \simeq d_i^{-1} (1 +$

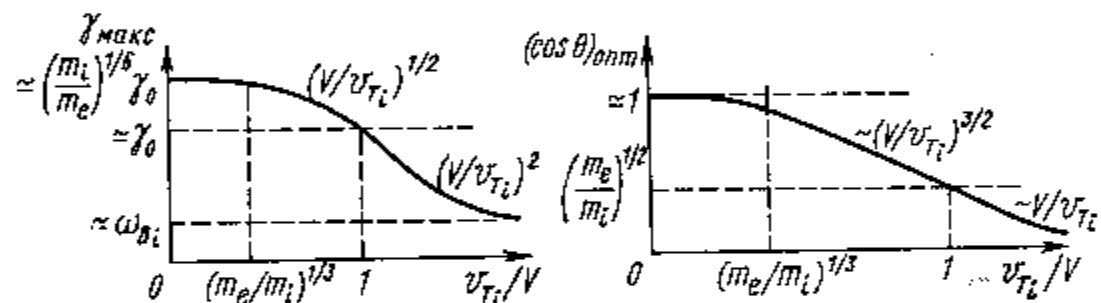


Рис. 11.3. Зависимость максимального инкремента неустойчивости плотной плазмы с $V \neq 0$ от теплового разброса ионов

Рис. 11.4. Зависимость параметра $\cos \theta$, соответствующего максимальному инкременту, от теплового разброса ионов

$+ \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{-1/2}$. Качественно зависимости $\gamma_{\text{макс}} = \gamma_{\text{макс}}(v_{Ti}/V)$ и $(\cos \theta)_{\text{опт}} = (\cos \theta)_{\text{опт}}(v_{Ti}/V)$ представлены на рис. 11.3 и 11.4.

§ 11.4. Раскачка ионно-звуковых колебаний в плазме с горячими электронами

При $T_e > m_e V^2$ электроны ведут себя в возмущениях с $\cos \theta \simeq 1$ как «горячие» — это следует из (11.7). В этом случае гидродинамическая неустойчивость при $\cos \theta \simeq 1$ невозможна. Максимальный инкремент неустойчивости определяется при этом формулой (11.5) с $\cos \theta$,

лежащим на пределе неравенства (11.7), так что

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}} (m_i V^2/T_e)^{1/6}; \quad (11.14)$$

$$(\cos \theta)_{\text{опт}} \simeq (m_e V^2/T_e)^{1/2}. \quad (11.15)$$

Поперечное волновое число соответствующих возмущений порядка

$$k_y \rho_e \simeq (1 - \omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2)^{-1/2}. \quad (11.16)$$

Видно, что $z_e \simeq 1$ при $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ и $z_e < 1$ при $\omega_{pe} < \omega_{Be}$.

Результаты (11.14) — (11.16) справедливы вплоть до $T_e \simeq m_i V^2$. При больших T_e гидродинамическая неустойчивость невозможна ни при каких $\cos \theta$, и тогда необходимо учитывать взаимодействие с волной резонансных электронов.

Полагая $|\omega - k_y V| \gg kv_{Ti}$, $kd_e \gg 1$ и считая величину

$$\frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) \times \\ \times I_0(z_e) \exp(-z_e)$$

малой из-за малости $1/z_e$ либо $\omega/|k_z| v_{Te}$, находим, что в этих условиях раскачиваются ионные ленгмюровские колебания (ветвь ω_4) с доплеровски сдвинутой частотой:

$$|\omega - k_y V| \approx \omega_{pi}. \quad (11.17)$$

Характерные k_{\perp} — порядка ω_{pi}/V , а характерные k_z — порядка ω_{pi}/v_{Te} . Инкремент оцениваем, исходя из формулы

$$\gamma = - \frac{\omega_{pi} \sqrt{\pi} (\omega - k_y V)}{2 (kd_e)^2 |k_z| v_{Te}} I_0(z_e) \exp(-z_e). \quad (11.18)$$

Поскольку $z_e \simeq (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2 (T_e/m_i V^2)$, то при $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ в (11.18) следует считать $z_e \gg 1$ и тогда по порядку величины

$$\gamma \simeq \left(\frac{m_i V^2}{T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \omega_{Bi}. \quad (11.19)$$

Этот результат остается в силе и при $m_i V^2/T_e < (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2 < 1$. При еще меньшей плотности $(\omega_{pe}/\omega_{Be})^2 <$

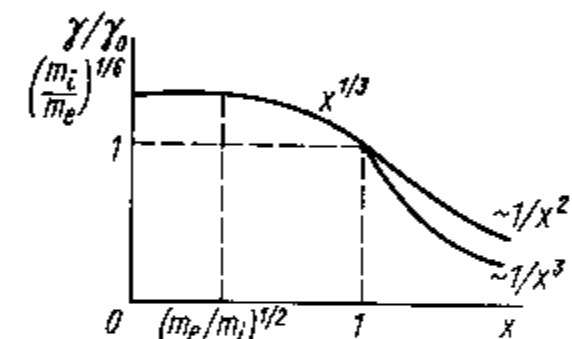


Рис. 11.5. Зависимость γ/γ_0 от $x \equiv T_e/m_i V^2$ ($\gamma \equiv \gamma_{\text{макс}}$). При $x \gg 1$ в плотной плазме ($\omega_{pe} > \omega_{Be}$) $\gamma_{\text{макс}} \sim 1/x^3$, в менее плотной плазме ($\omega_{pe} < \omega_{Be}$) $\gamma_{\text{макс}} \sim 1/x^2$

$\ll m_i V^2 / T_e$ в (11.18) следует считать $z_e < 1$, так что

$$\gamma \simeq \frac{m_i V^2}{T_e} \omega_{pi}. \quad (11.20)$$

Качественная зависимость $\gamma_{\max} = \gamma_{\max}(m_i V^2 / T_e)$ представлена на рис. 11.5.

§ 11.5. Раскачка колебаний плазмы поперечным ионным потоком

1. Холодный поток в холодной плазме. Предполагаем, что плотность плазмы удовлетворяет условию $\omega_{Bi} \ll \omega_{pi} \ll \omega_{Be}$. Рассмотрим возбуждение в такой плазме колебаний потоком ионов плотности $n_1 = \alpha n_0 \ll n_0$, движущимся поперек магнитного поля, $\mathbf{V} \perp \mathbf{B}_0$. Тепловой разброс пучка будем считать пренебрежимо малым, плазму — холодной.

При указанных предположениях дисперсионное уравнение сводится к типу (7.2), в котором

$$\epsilon_0^{(0)} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}; \quad (11.21)$$

$$\epsilon_0^{(1)} = -\alpha \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_y V)^2}. \quad (11.22)$$

Уравнение $\epsilon_0^{(0)} = 0$ — это то же самое, что и (6.7). Частота $\omega^{(0)}$ возбуждаемых потоком собственных колебаний плазмы определяется соотношениями (6.4) или (6.9). Резонансное волновое число равно $k_y = \omega_2 / V$. Этому волновому числу соответствует максимальный инкремент

$$\gamma \simeq \alpha^{1/3} [1 + (m_i / m_e) \cos^2 \theta]^{-1/3} \omega_2. \quad (11.23)$$

Приближение холодного пучка, $\omega > kv_{Ti}$, оправдано, если

$$v_{Ti} / V < \alpha^{1/3} [1 + (m_i / m_e) \cos^2 \theta]^{-1/3}. \quad (11.24)$$

Ионы плазмы можно считать холодными, $\gamma > kv_{Ti}$, при $v_{Ti} < V$, а электроны, $z_e < 1$, $\omega > k_z v_{Te}$, — при

$$v_{Te} / V < \min [\omega_{Be} / \omega_2, (\cos \theta)^{-1}]. \quad (11.25)$$

Условие $\gamma > \omega_{Bi}$ означает

$$\alpha^{1/3} > (\omega_{Bi} / \omega_2) [1 + (m_e / m_i) \cos^2 \theta]^{1/3}. \quad (11.26)$$

2. Горячий поток в холодной плазме. Предполагая распределение частиц пучка максвелловским $f^{(1)} \sim \exp[-m_i(v - V)^2 / 2T_1]$, вместо (11.22) имеем

$$\epsilon_0^{(1)} = \frac{2\alpha\omega_{pi}^2}{(kv_{T1})^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega - k_y V}{|k|v_{T1}} W\left(\frac{\omega - k_y V}{|k|v_{T1}}\right) \right]. \quad (11.27)$$

При условии, обратном (11.24), из (11.27) и (11.21) находим, что колебания частоты (6.4) или (6.9) раскачиваются с инкрементом

$$\gamma = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}\omega_{pi}^2}{(kv_{T1})^3} \left\{ \frac{k_y V - \omega}{\partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega} \exp\left[-\frac{(\omega - k_y V)^2}{(kv_{T1})^2}\right] \right\}_{\omega=\omega_2}. \quad (11.28)$$

Если тепловой разброс пучка не очень велик, $v_{T1} < V$, то максимальный инкремент как функция k_y достигается при $k_y \approx \omega_2 / V$ (ср. с § 3.2):

$$\gamma_{\max} \approx \alpha \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_2} \cdot \frac{V}{v_{T1}} \right)^2 \left(\frac{\partial \epsilon_0^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (11.29)$$

Зависимость γ от теплового разброса потока такая же, как и при $\mathbf{B}_0 = 0$ (ср. с рис. 3.2).

3. Ионный поток в плазме с горячими электронами. Если не выполнено хотя бы одно из условий (11.25), то электроны следует считать горячими. В этом случае $\epsilon_0^{(1)}$ сохраняет прежний вид (11.22), а

$$\epsilon_0^{(0)} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 d_e^2}. \quad (11.30)$$

Согласно § 6.3, уравнение $\epsilon_0^{(0)} = 0$ с $\epsilon_0^{(0)}$ вида (11.30) описывает колебания, которые при $\omega < k_z v_{Te}$ соответствуют высокочастотным ионно-звуковым колебаниям, а при $z_e > 1$ — коротковолновой части ветви ω_2 .

При наличии пучка дисперсионное уравнение сводится к следующему:

$$1 + \frac{1}{(kd_e)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \alpha \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_y V)^2} = 0. \quad (11.31)$$

В этом предельном случае магнитное поле выпадает из рассмотрения, и задача о раскачке колебаний поперечным пучком оказывается аналогичной задаче о раскачке колебаний продольным пучком, см. § 3.5. Вытекающие из (11.31) результаты совпадают с изложенными в § 3.5, если в последних сделать замену $k_z \rightarrow k_y$, $k_{\perp}^2 \rightarrow k_x^2 + k_z^2$.

Библиографический обзор к гл. 11

1. Кадомцев Б. Б. О неустойчивости плазмы в магнитном поле при наличии ионных пучков.—В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Вып. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 364.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы.—«Успехи физ. наук», 1961, т. 73, с. 701.
В работах [1, 2] исследуется устойчивость плазмы при наличии ионных потоков, движущихся поперек магнитного поля (§ 11.5).
3. Сагдеев Р. З. О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме.—«Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 1485. Отмечается, что плазма с неустойчивым многоскоростным распределением ионов может образоваться в результате опрокидывания ударной волны (§ 11.5).
4. Горбатенко М. Ф. Взаимодействие электронного пучка с плазмой, находящейся в магнитном поле.—В сб.: Физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза. Вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1962, с. 39.
Обсуждается высокочастотная неустойчивость холодного ионного потока, движущегося в плазме поперек магнитного поля (§ 11.5).
5. Buneman O. Instability of electrons, drifting through ions across a magnetic field.—«J. Nucl. Energy», 1962, v. C4, p. 444.
Исследуется неустойчивость поперечного относительного движения электронов и ионов (§ 11.2, 11.4).
6. Бабыкин М. В. и др. Новые результаты по турбулентному нагреву плазмы.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 511.
Исследуется высокочастотная неустойчивость азимутального относительного движения электронов и ионов (§ 11.2, 11.4).
7. Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Высокочастотная неустойчивость плазмы, находящейся в радиальном электрическом и продольном магнитном полях.—«Письма в ЖЭТФ», 1966, т. 3, с. 247.
Исследуется высокочастотная неустойчивость плазмы с относительным движением электронов и ионов поперек магнитного поля (§ 11.2).
8. Sizonenko V. L., Stepanov K. N. Plasma instability in the electric field of a ion-cyclotron wave.—«Nucl. Fusion», 1967, v. 7, p. 134.
Исследуется раскачка колебаний поперечным током при учете теплового движения ионов и электронов (§ 11.2—11.4).

ГЛАВА 12

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С НЕМАКСВЕЛЛОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИОНОВ ПО ПОПЕРЕЧНЫМ СКОРОСТЯМ

§ 12.1. Неустойчивость плазмы с δ -функциональным распределением ионов по поперечным скоростям

Распределение ионов по поперечным скоростям может быть существенно немаксвелловским, например, из-за инъекции в ловушку быстрых частиц. Другая возможная причина этого — обеднение плазмы медленными ионами вследствие ухода последних в конус потерь.

Если ионное распределение таково, что $\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$ при малых v_{\perp} , то ионы обладают свойствами, аналогичными свойствам пучка, движущегося через ионную компоненту плазмы. При этом возможно развитие своего рода пучковой неустойчивости. Таковой является обсуждаемая ниже высокочастотная неустойчивость, $(\gamma, \omega) \gg \omega_{Bi}$. Она развивается в плазме не слишком малой плотности, $\omega_{pi} > \omega_{Bi}$.

Пусть распределение ионов по поперечным скоростям имеет вид $f_{\perp} \sim \delta(v_{\perp}^2 - v_0^2)$, т. е. все ионы обладают одной и той же поперечной энергией. Пусть распределение электронов по скоростям — максвелловское с температурой, значительно меньшей энергии ионов, $T_e \ll m_i v_0^2 / 2$. Покажем, что если плотность плазмы не слишком мала, $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$, то такая плазма должна быть неустойчивой относительно возмущений с $\omega \gg \omega_{Bi}$ и $k_z \ll k$.

При указанных предположениях с помощью (5.3) и (5.34) можно получить дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \left(\frac{\omega_{pe} \cos \theta}{\omega} \right)^2 - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega^2 - k^2 v_0^2)^{3/2}} = 0. \quad (12.1)$$

Чтобы проще всего убедиться в возможности развития неустойчивости, рассмотрим возмущения с $\cos \theta > (m_e/m_i)^{1/2}$. При этом вклад ионов в (12.1) невелик. В пренебрежении им мы имеем бы чисто электронные колебания с вещественной частотой (6.4). В следующем приближении таким же путем, как и в § 1.5 находим, что взаимодействие

этих колебаний с ионами приводит к неустойчивости, максимальный инкремент которой порядка

$$\gamma \simeq \left(\frac{m_e}{m_i \cos^2 \theta} \right)^{2/5} \frac{\omega_{pe} \cos \theta}{(1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.2)$$

Здесь роль малого параметра играет величина $\alpha \equiv m_e / m_i \cos^2 \theta$. Поэтому (12.2) качественно справедливо вплоть до $\cos \theta \simeq (m_e / m_i)^{1/2}$. При таких $\cos \theta$ из (12.2) следует

$$\gamma \simeq \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.3)$$

Поперечное и продольное волновые числа при этом по порядку величины равны:

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp} \simeq k_{\perp \text{ опт}} \simeq \frac{\omega_{pi}}{v_0} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{1/2}; \\ k_z \simeq k_{z \text{ опт}} \simeq (m_e / m_i)^{1/2} k_{\perp \text{ опт}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Видно, что при большой плотности плазмы, $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$, инкремент неустойчивости достигает значений порядка гибридной частоты, $\gamma \simeq (m_i / m_e)^{1/2} \omega_{Bi}$. При $\omega_{pi} \ll \omega_{Bi}$ перестает удовлетворяться приближение $\gamma > \omega_{Bi}$, что означает отсутствие высокочастотной неустойчивости в плазме столь низкой плотности.

При $\omega \simeq kv_0$ высокочастотная неустойчивость проявляется как гидродинамическая: в раскачке колебаний участвуют все ионы. Что касается возмущений с малой фазовой скоростью, $\omega/k \ll v_0$, то с ними взаимодействует лишь малая доля ионов, тех, скорости которых почти перпендикулярны волновому вектору, $kv = \omega \ll kv$. При этом неустойчивость становится существенно кинетической: ее инкремент определяется производной $\partial f_0(v_x) / \partial v_x$ одномерной функции распределения

$$f_0(v_x) = \int f_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}) dv_y$$

(при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{x}$). С помощью (12.4) можно найти, что инкремент кинетической неустойчивости при $\cos \theta \simeq (m_e / m_i)^{1/2}$ несколько меньше (12.3). С уменьшением ω/k он убывает как $1/k^3$.

§ 12.2. Неустойчивость плазмы с размытым распределением ионов по поперечным скоростям

При $f_{\perp i}(\varepsilon_{\perp})$ произвольного вида дисперсионное уравнение (12.1) заменяется следующим:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \left\langle \frac{\partial f_{\perp}}{\partial \varepsilon_{\perp}} \left[1 - \frac{\omega}{(\omega^2 - k^2 v_{\perp}^2)^{1/2}} \right] \right\rangle = 0. \quad (12.5)$$

Это получается с использованием формулы (5.33).

С помощью (12.5) можно убедиться, что увеличение разброса частиц по скоростям (около средней скорости v_0) ослабляет неустойчивость, рассмотренную в § 12.1. Особенно этот разброс по скоростям влияет на возмущения с $\omega \approx kv_0$. В частности, если

$$f_{\perp i} = \frac{1}{v_0} (\pi v_T^2)^{-1/2} \exp[-(v_{\perp} - v_0)^2 / v_T^2], \quad (12.6)$$

то из (12.5) следует, что гидродинамическая резонансная неустойчивость с инкрементом (12.2) исчезает, если

$$\frac{v_T}{v_0} < \left(\frac{m_e}{m_i \cos^2 \theta} \right)^{2/5}. \quad (12.7)$$

При таком разбросе по скоростям остается только кинетическая неустойчивость с инкрементом, в несколько раз меньшим (12.3), и фазовой скоростью колебаний $\omega/k < v_0$. Причем кинетическая неустойчивость имеет место и в случае $v_T \simeq v_0$, если только одномерное распределение ионов имеет минимум. При произвольном виде $f_{\perp i}$ частота колебаний $\text{Re } \omega$ определяется выражением (6.4), а инкремент

$$\begin{aligned} \gamma &= \zeta \int_{\text{Re } \frac{\omega}{k}}^{\infty} \frac{\partial f_{\perp}}{\partial v_{\perp}} \frac{dv_{\perp}}{[(v_{\perp} k / \text{Re } \omega)^2 - 1]^{1/2}} = \\ &= \zeta \left(\frac{1}{v_x} \frac{\partial f_0(v_x)}{\partial v_x} \right)_{v_x = \text{Re } \omega / k_x}; \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$\zeta \equiv \frac{\text{Re } \omega}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1}. \quad (12.9)$$

В § 8.4 в качестве примера было рассмотрено неравно-весное распределение (8.69). Этому двумерному распределению соответствует следующее одномерное:

$$f_0(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_1}{T}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right) \left[1 - \left(\frac{T_1}{T+T_1}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T_1}\right)\right]. \quad (12.10)$$

В этом случае $\partial f_0 / \partial v_x > 0$, если v_x достаточно мало. Поэтому в соответствии с (12.8) такое распределение неустойчиво.

§ 12.3. Неустойчивость стационарного распределения ионов в адиабатической ловушке

Плазма, удерживаемая в адиабатической ловушке, обеднена ионами с малой поперечной энергией из-за ухода последних в конус потерь. Вследствие этого в такой плазме могут развиваться неустойчивости типа рассмотренных в § 12.1, 12.2. Обоснование этих утверждений приводится ниже.

Вычислим стационарную функцию распределения при максимально упрощенной постановке задачи. Предположим, что при $|z| < L/2$ магнитное поле B_0 однородно и направлено по оси z , а в области $|z| = L/2 \ll L/2$ изменяется до некоторого значения $B_{0 \text{ макс}} > B_0$.

Характер движения заряженной частицы в поле такой формы определяется законами сохранения ее энергии $\varepsilon \equiv (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)/2 = \text{const}$ и магнитного момента $\mu \equiv v_{\perp}^2 / 2\omega_B = \text{const}$.

Пусть при $|z| < L/2$ частица имеет компоненты скорости $v_{\perp}^{(0)}, v_{\parallel}^{(0)}$. При подходе к области с более сильным полем ее поперечная скорость увеличивается, а продольная уменьшается, так что

$$\left. \begin{aligned} v_{\perp}(z) &= v_{\perp}^{(0)} \left(\frac{B_0(z)}{B_0(0)}\right)^{1/2}; \\ v_{\parallel}(z) &= \sqrt{(v^{(0)})^2 - (v_{\perp}^{(0)})^2 \frac{B_0(z)}{B_0(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Из второго соотношения следует, что частица пройдет в область поля с $B_0 = B_{0 \text{ макс}}$, если

$$\sin \theta \equiv \frac{v_{\perp}^{(0)}}{v^{(0)}} \leq \frac{B_0(0)}{B_{0 \text{ макс}}} \equiv \sin \theta_0, \quad (12.12)$$

либо отразится в область с $B_0 = B_0(0)$ в противном случае. Это означает, что в поле указанной конфигурации, обычно называемом полем с магнитными пробками, могут удерживаться лишь частицы, скорости которых направлены под достаточно большим углом к магнитному полю, $\theta > \theta_0$ (иначе говоря, при θ , не лежащем в конусе потерь). Поэтому стационарная функция распределения плазмы в таком поле должна удовлетворять условию

$$f_0(v) = 0 \quad \text{при} \quad \theta \leq \theta_0. \quad (12.13)$$

Будем считать, что этот уход частиц в конус потерь компенсируется инжекцией других частиц извне. Число частиц, инжектируемых за единицу времени в единичный интервал скоростей и пространства, обозначим q . Тогда функция распределения $f_0(v)$ при $\theta > \theta_0$ будет определяться кинетическим уравнением (I), в правой части которого наряду со столкновительным членом стоит также q . Решим это уравнение в следующих предположениях.

Полагаем, что q зависит только от v_{\perp}, v_{\parallel} (и не зависит от координат и азимутального угла в пространстве поперечных скоростей). Учитываем только столкновения ионов с ионами (нас интересует ионное распределение). В столкновительном члене пренебрегаем отличием функции $f(v')$ от максвелловской (эта процедура не является, конечно, вполне строгой). Предполагаем, что $q(v, \theta)$ можно подобрать такой, что искомая функция распределения имеет вид

$$f_0 = \Psi(\theta) \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right). \quad (12.14)$$

В результате уравнение Больцмана со столкновительным членом в форме Ландау приводится к виду

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{qv^2}{a(v)} \exp\left(\frac{m_i v^2}{2T_i}\right), \quad (12.15)$$

где $a(v)$ — некоторая функция модуля скорости, явный вид которой нам не понадобится.

Левая часть (12.15) не зависит от v . Поэтому q должно иметь вид

$$q = C \frac{a(v)}{v^2} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right). \quad (12.16)$$

Решение (12.15) с граничными условиями $\Psi(\theta_0) = 0$, $\Psi(\theta) = \Psi(-\theta)$ при учете (12.16) имеет вид

$$\Psi(\theta) = C \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}. \quad (12.17)$$

Окончательно из (12.14) и (12.17) следует

$$f_0 = C \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right). \quad (12.18)$$

Константу C можно выразить через плотность плазмы $n_0 = \int f_0 dv$.

Найдем с помощью (12.18) распределение частиц по поперечным скоростям, $f_{\perp} = \int f_0 dv_{\parallel}$. Для простоты будем считать, что пробочное отношение мало ($B_0 \text{ макс} - B_0 \ll B_0$), так что

$$(\pi/2) - \theta_0 \ll 1, \quad v^2 - v_{\perp}^2 \ll v_{\perp}^2. \quad (12.19)$$

Тогда

$$\ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)^2 - \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right)^2 \right], \quad (12.20)$$

где $|v_{\parallel}| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) v_{\perp}$. Подставляя (12.20) в (12.18), интегрируя результат по продольной скорости и выражая C через n_0 , получаем:

$$f_{\perp} = \frac{n_0}{2} \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} v_{\perp} \exp\left(-\frac{m_i v_{\perp}^2}{2T_i}\right). \quad (12.21)$$

Видно, что наличие конуса потерь приводит к установлению стационарного состояния с неравновесным распределением по поперечным скоростям, $\partial f_{\perp} / \partial v_{\perp} > 0$.

Теперь покажем, что распределение (12.21) неустойчиво. С точностью до положительной константы из (12.21) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(v_x)}{\partial v_x} &\sim v_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-m_i(v_x^2 + v_y^2)/2T_i]}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{m_i(v_x^2 + v_y^2)}{T_i} \right) dv_y. \end{aligned} \quad (12.22)$$

При малых v_x/v_T с логарифмической точностью находим

$$\frac{\partial f_0(v_x)}{\partial v_x} \sim v_x \ln \frac{v_T}{|v_x|}. \quad (12.23)$$

Видно, что $v_x \partial f_0(v_x) / \partial v_x > 0$. В соответствии с (12.8) это означает неустойчивость.

Более подробные расчеты высокочастотной неустойчивости плазмы в адиабатической ловушке можно найти в работе Поста и Розенблюта.

§ 12.4. Стабилизирующая роль электронной температуры

При выяснении влияния электронной температуры на высокочастотную неустойчивость ограничимся рассмотрением случая δ -функционального распределения ионов. С помощью (5.29) и (5.34) получаем дисперсионное уравнение, учитывающее конечность электронной температуры:

$$\begin{aligned} \epsilon_0(\omega) \equiv 1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left[1 + \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{|k_z|v_{Te}} W\left(\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}}\right) \times \right. \\ \left. \times I_0(z_e) \exp(-z_e) \right] - \frac{\omega \omega_{pi}^2}{(\omega^2 - k_{\perp}^2 v_0^2)^{3/2}} = 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Согласно критерию Найквиста (§ 2.7), для неустойчивости необходимо, чтобы при некотором $\omega = \omega^*$ функция $\text{Im } \epsilon_0(\omega)$ обращалась в нуль, $\text{Im } \epsilon_0(\omega^*) = 0$. Из (12.24) видно, что это условие может удовлетворяться только при

$$\omega^* < k_{\perp} v_0. \quad (12.25)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon_0(\omega^*) = 1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \times \\ \times \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}\omega^*}{|k_z|v_{Te}} \text{Im } W\left(\frac{\omega^*}{|k_z|v_{Te}}\right) I_0(z_e) \exp(-z_e) \right]. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Для неустойчивости необходимо, чтобы $\text{Re } \epsilon_0(\omega^*) < 0$, т. е.

$$\frac{\sqrt{\pi}\omega^*}{|k_z|v_{Te}} \text{Im } W\left(\frac{\omega^*}{|k_z|v_{Te}}\right) I_0(z_e) \exp(-z_e) > 1 + (kd_e)^2. \quad (12.27)$$

Используя таблицы функций W и I_0 можно убедиться, что это условие удовлетворяется, только если

$$\left. \begin{aligned} \omega^*/|k_z|v_{Te} > 0,925; \\ z_e < 1, \quad kd_e < 1. \end{aligned} \right\} \quad (12.28)$$

Из неравенств (12.25) и $\omega^* > |k_z| v_{Te}$ следует, что в плазме с конечной температурой электронов значения $\cos \theta$ для нарастающих возмущений ограничены сверху условием

$$\cos \theta < v_0/v_{Te}. \quad (12.29)$$

В соответствии с § 12.1 характерные значения $\cos \theta$ порядка $(m_e/m_i)^{1/2}$. Поэтому ограничение (12.29) существенно, если $v_0/v_{Te} < (m_e/m_i)^{1/2}$, т. е.

$$T_e > m_i v_0^2. \quad (12.30)$$

При условии (12.30) становится невозможным развитие неустойчивости с инкрементом (12.3). С помощью (12.24) находим, что в этом случае максимально возможный инкремент порядка

$$\gamma \simeq \left(\frac{m_i v_0^2}{T_e} \right)^{1/2} \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.31)$$

Условие $\gamma > \omega_{Bi}$ удовлетворяется, если только плотность плазмы такова, что

$$(\omega_{pi}/\omega_{Bi}) > T_e/m_i v_0^2. \quad (12.32)$$

Поперечное и продольное волновые числа нарастающих возмущений ограничены сверху условием [ср. с (12.4)]

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp} &\leq (m_i v_0^2/T_e)^{1/2} k_{\perp \text{ опт}}; \\ k_z \rho_i &\leq \frac{m_i v_0^2}{T_e} \min \left(1, \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Неравенство (12.32) свидетельствует о том, что с повышением температуры электронов граница неустойчивости сдвигается в область больших плотностей, $n_0 \sim T_e$.

Из (12.33) следует, что при $T_e > m_i v_0^2$ нарастающие возмущения должны обладать большими длинами волн, не только поперечной, но и продольной $\lambda_{\parallel} \sim 1/k_z \sim T_e$. В случае плазмы конечной длины λ_{\parallel} может стать больше продольного размера плазмы L , а это означало бы невозможность развития неустойчивости. Из всего этого ясно, что конечность электронной температуры является стабилизирующим фактором.

§ 12.5. Плазма с двумя группами ионов

Пусть плазма состоит из двух групп ионов: холодных, $T \rightarrow 0$, и горячих с $\partial f_{\perp}/\partial v_{\perp} > 0$. Такая плазма может быть неустойчива вследствие коллективного взаимодействия между этими группами ионов. Рассмотрим некоторые примеры такого рода неустойчивостей.

1. Плазма с малой долей моноэнергетических ионов и холодными электронами. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид:

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \cos^2 \theta \right) - \frac{\alpha \omega \omega_{pi}^2}{(\omega^2 - k^2 v_0^2)^{3/2}} = 0. \quad (12.34)$$

Отсюда находим, что «резонансные» колебания, $\omega \approx kv_0$, раскачиваются с инкрементом

$$\gamma \simeq \alpha^{2/5} \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.35)$$

Это имеет место при условии $\cos \theta \leq (m_e/m_i)^{1/2}$, $k_{\perp} \simeq \omega_{pi}/v_0 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}$. Приближение $\gamma > \omega_{Bi}$ справедливо, если

$$(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 > \alpha^{-4/5}. \quad (12.36)$$

При меньших плотностях плазмы возможна неустойчивость с частотами вблизи циклотронных гармоник, см. ниже § 14.6.

2. Плазма с малой долей горячих ионов с конечным тепловым разбросом около средней поперечной энергии. Пусть функция распределения горячих ионов имеет вид (12.6). Результаты предыдущего пункта справедливы, если только

$$v_{T1} < \alpha^{2/5} v_0. \quad (12.37)$$

В противном случае резонансные колебания не раскачиваются. Это видно из следующего. Полагаем $|\omega - kv_0| < kv_{T1}$. При этом

$$\epsilon_0^{(1)} = \frac{\alpha \omega_{pi}^2 (1+i) \Gamma(3/4)}{2 \sqrt{\pi} k^2 (2v_0)^{1/2} v_{T1}^{3/2}}. \quad (12.38)$$

Вещественная часть этого выражения не зависит от разности $\omega - kv_0$, так что неустойчивость гидродинамического типа невозможна. Поскольку $\text{Im } \epsilon_0^{(1)} > 0$, то невозможна и кинетическая неустойчивость [в согласии с формулой (2.17)].

При условии, обратном (12.37), могут раскачиваться нерезонансные колебания, $\omega < kv_0$. Это — кинетическая неустойчивость пучка с большим тепловым разбросом типа рассмотренной в § 3.3. Инкремент ее по порядку величины равен

$$\gamma_{\text{кин}} \simeq \alpha \text{Re } \omega, \quad (12.39)$$

где $\text{Re } \omega$ дается формулой (6.9). Приближение $\gamma > \omega_{Bi}$ справедливо, если

$$\alpha > \max \left[\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}}, \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \right]. \quad (12.40)$$

3. Группа холодных ионов малой плотности в плазме с горячими неравновесными ионами. В п. 1 и 2 предполагалось, что доля горячих ионов мала по сравнению с долей холодных. Теперь предположим обратное. Плотность плазмы считаем достаточно большой $\omega_{pi} \alpha^{1/2} > \omega_{Bi}$, где α — отношение плотностей холодных и горячих ионов. При этом можно, как и в п. 1 и 2, использовать высокочастотное приближение.

Основной эффект, обусловленный холодными ионами, состоит в раскачке колебаний с $k_z = 0$. Дисперсионное уравнение для этой неустойчивости имеет вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \alpha \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{i\omega\omega_{pi}^2}{(k_{\perp}v_0)^3} = 0. \quad (12.41)$$

Частота и инкремент порядка [ср. с (12.35)]:

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \frac{\alpha^{1/2}\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.42)$$

Поперечное волновое число

$$k_{\perp} \simeq \frac{\alpha^{1/6}\omega_{pi}}{v_0(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (12.43)$$

Учитывая, что эта неустойчивость абсолютная (неконвективная, см. § 4.2), приходим к выводу, что небольшая добавка холодных ионов ухудшает устойчивость горячих ионов в адиабатической ловушке.

Библиографический обзор к гл. 12

1. Днестровский Ю. Н. О циклотронной неустойчивости плазмы. II. Плазма с немаксвелловским распределением ионов. — «Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 259. Отмечается, что плазма в адиабатических ловушках обеднена полами малой поперечной энергии, вследствие чего поперечное распределение ионов немонотонно и имеет пучковый характер.
2. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. Возбуждение продольных колебаний в плазме с неизотропным распределением ионов по скоростям. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1013. Показана возможность развития высокочастотной неустойчивости (§ 12.1).
3. Михайловский А. Б. Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 125. Исследуется высокочастотная неустойчивость плазмы с неравновесными ионами и холодными электронами (§ 12.1).
4. Rosenbluth M. N., Post R. F. High-frequency electrostatic plasma instability inherent to «loss-cone» particle distributions. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 547.
5. Post R. F., Rosenbluth M. N. Electrostatic instabilities in finite mirror-confined plasmas. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 730. В работах [4, 5] исследуется высокочастотная неустойчивость в плазме с холодными электронами (§ 12.1, 12.2).
6. Aamodt R. E., Book L. Critical length determination for convective instabilities in weakly inhomogeneous plasmas. — «Phys. Fluids» 1966, v. 9, p. 143. Обсуждается поведение волновых пакетов в неустойчивой плазме с δ -функциональным распределением ионов и холодными электронами. Рассматривается вопрос о критической длине ловушки, для которой развитие высокочастотной неустойчивости не опасно.
7. Pall L. S., Peckrotte W. Electrostatic instabilities of a plasma with magnetically supported velocity space anisotropy at high density. — In: Proceedings of the Seventh Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. V. 2. Beograd, «Gradevinska Knjiga», 1966, p. 624. Исследуется влияние электронной температуры на высокочастотную неустойчивость (§ 12.4).
8. Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. — В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Вып. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 3. Найдено стационарное распределение ионов в адиабатической ловушке (§ 12.3).

9. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. Возбуждение колебаний плазмы потоком осцилляторов. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 441.
10. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. К теории устойчивости ионного пучка, инжектируемого в плазму поперек магнитного поля. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1964.
11. Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N., Chang D. B. High-frequency «loss-cone» flute instabilities inherent to two component plasmas. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 953.
- В работах [9—11] исследуются возбуждение колебаний плазмы группой ионов с немаксвелловским распределением по поперечным скоростям (§ 12.5).

ГЛАВА 13

ПЛАЗМА С АНИЗОТРОПНЫМИ ИОНАМИ

§ 13.1. Разреженная сильноанизотропная плазма с холодными электронами

Анизотропное распределение ионов по скоростям является характерным для плазмы, удерживаемой в адиабатических ловушках. Ионная анизотропия приводит к неустойчивостям, механизм которых сходен с механизмом рассмотренных в гл. 8 электронных анизотропных неустойчивостей. Картина, однако, получается несколько более сложной, поскольку в колебаниях участвуют как ионы, так и электроны.

В случае плазмы малого давления, $\beta \ll 1$, все ионные анизотропные неустойчивости обладают частотами, близкими к ионной циклотронной частоте и ее гармоникам, и являются электростатическими. Их инкременты и условия возникновения существенно зависят от относительной плотности плазмы, $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$, от отношения температуры электронов к энергии ионов, T_e/T_i и, конечно, от степени анизотропии ионов.

В настоящем параграфе рассмотрим раскачку ионно-циклотронных колебаний в предположениях $T_{||i}/T_{\perp i} \rightarrow 0$, $T_e/T_{\perp i} \rightarrow 0$. Конечность $T_{||i}/T_{\perp i}$ учтем в § 13.2, а конечность $T_e/T_{\perp i}$ — в § 13.3 и 13.4. Плотность плазмы считаем малой: $\omega_{pi}/\omega_{Bi} \ll 1$. Колебания плазмы с $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ рассмотрим в § 13.4.

Дисперсионное уравнение для ионных колебаний можно получить с помощью (8.29), заменив в последнем элек-

тронные индексы ионными и добавив после этого в левую часть равенства электронное слагаемое

$$\epsilon_0^{(e)} = -(\omega_{pe} \cos \theta / \omega)^2.$$

Таким образом, находим

$$1 - \left(\frac{\omega_{pe} \cos \theta}{\omega} \right)^2 - \frac{\omega_{pi}^2 I_n(z_i) \exp(-z_i) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega_{Bi}(\omega - n\omega_{Bi})} \cdot \frac{n I_n \exp(-z_i)}{z_i} = 0. \quad (13.1)$$

Здесь пренебрежено членами порядка $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$.

Ветви колебаний с $\omega = \omega_{pe}(\cos \theta)$ представлены на рис. 13.1. Этот рисунок сходен с картиной электронных ветвей в плазме с $T_{\perp e} \gg T_{||e}$ (ср. рис. 13.1 с рис. 9.1).

В случае плазмы с $T_{\perp i} = T_{||i}$ вместо рис. 13.1 получится рис. 6.2. Из сравнения последних видно, что в сильноанизотропной плазме имеются по одна, а две ветви колебаний с $\omega \approx n\omega_{Bi}$. Эти ветви аналогичны «сносовым» пучковым ветвям, п. 2 § 1.5.

При $\theta = \theta_0$, определенном формулой (6.45), циклотронные ветви пересекаются с ветвью замагниченных ленгмюровских колебаний (см. рис. 13.1). Вблизи этого значения θ развивается резонансная неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} |n\omega_{Bi}| \left[\frac{m_e}{2m_i} I_n(z_i) \exp(-z_i) \right]^{1/3}. \quad (13.2)$$

Инкремент резонансных колебаний имеет не слишком резкий максимум при $z_i \simeq 1$, по порядку величины равный

$$\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/3} \omega_{Bi}. \quad (13.3)$$

При $\cos \theta > \cos \theta_0$ развивается нерезонансная неустойчивость с характерным инкрементом порядка

$$\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{Bi}. \quad (13.4)$$

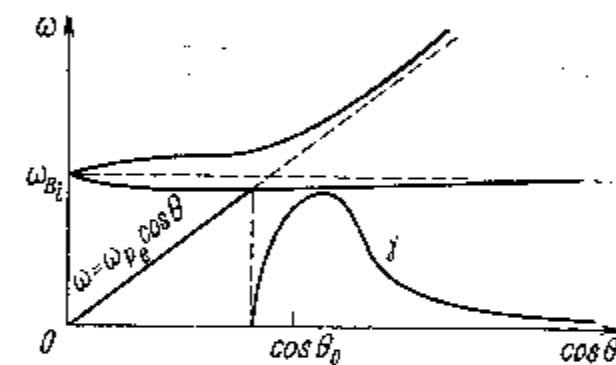


Рис. 13.1. Ветви колебаний плазмы с анизотропными ионами при $\omega \approx \omega_{Bi}$

Результаты (13.2) — (13.4) и картина ветвей, представленная на рис. 13.1, получены в пренебрежении последним членом левой части уравнения (13.1). Это пренебрежение законно, если

$$\gamma/\omega_{Bi} \ll z_i \operatorname{ctg}^2 \theta \quad (13.5)$$

При $z_i \simeq 1$ это условие удовлетворяется для всех $\cos \theta \gtrsim \cos \theta_0$, если только плотность плазмы не слишком велика:

$$(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 < (m_e/m_i)^{2/3}. \quad (13.6)$$

В плазме такой плотности только и возможна резонансная неустойчивость с инкрементом (13.3). В противном случае может развиваться лишь нерезонансная неустойчивость с инкрементом (13.4).

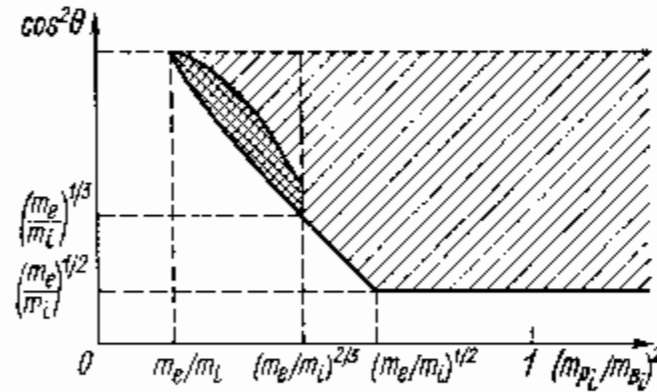


Рис. 13.2. Диаграмма устойчивости плазмы с анизотропными ионами при $T_{\parallel i} \rightarrow 0$, $T_e \rightarrow 0$. Заштрихована область неустойчивости. Двойной штриховкой отмечена область резонансной неустойчивости

Ветвь колебаний $\omega = \omega_{pe} \cos \theta$ пересекается с циклотронами, только если плотность плазмы не чрезмерно мала:

$$(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 > m_e/m_i. \quad (13.7)$$

Это неравенство является необходимым условием неустойчивости, в противном случае все возмущения, описываемые уравнением (13.1), имеют вещественную частоту.

Диаграмма устойчивости на плоскости $[(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2, \cos^2 \theta]$ представлена на рис. 13.2. При $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 \simeq m_e/m_i$ возбуждаются только возмущения с $\cos^2 \theta \simeq 1$. С ростом плотности, вплоть до тех пор пока выполнено условие (13.5), граница устойчивости определяется приближенным соотношением

$$(\cos^2 \theta)_{\text{гран}} \approx \cos^2 \theta_0 = (m_e/m_i) (\omega_{Bi}/\omega_{pi})^2. \quad (13.8)$$

Условие (13.5) для $\cos \theta = \cos \theta_0$ нарушается при плотности

$$\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}}\right)^2 \gtrsim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \quad (13.9)$$

При этом возможна только нерезонансная неустойчивость [ср. с (13.6)] и лишь при условии (см. также рис. 13.2)

$$\cos^2 \theta > (\cos^2 \theta)_{\text{мин}} \simeq (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (13.10)$$

Зависимость максимально возможного инкремента от параметра $b_i \equiv (\omega_{pi}/\omega_{ni})^2$ представлена на рис. 13.3. При

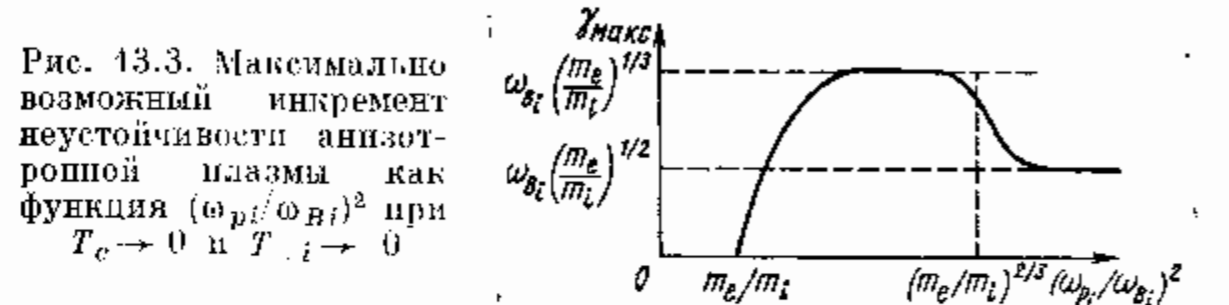


Рис. 13.3. Максимально возможный инкремент неустойчивости анизотропной плазмы как функция $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$ при $T_e \rightarrow 0$ и $T_{\parallel i} \rightarrow 0$

$m_e/m_i < b_i < (m_e/m_i)^{2/3}$ инкремент $\gamma_{\text{макс}}$ — это инкремент резонансной неустойчивости [см. (13.2) и (13.3)], а при $b_i > (m_e/m_i)^{2/3}$ — перезонансной.

Принятое в настоящем параграфе приближение $T_e \rightarrow 0$, $T_{\parallel i} \rightarrow 0$ справедливо, если выполнены неравенства $\omega \gg \gg k_z v_{Te}$, $|\omega - n\omega_{Bi}| \gg k_z v_{Ti}$. В случае резонансной неустойчивости и при $z_i \simeq 1$ это означает:

$$\eta_e < b_i \leq \mu^{2/3}; \quad (13.11)$$

$$\eta_i < b_i/\mu^{1/3} \leq \mu^{1/3}. \quad (13.12)$$

Обозначения: $\eta_e \equiv T_e/T_{\perp i}$; $\eta_i \equiv T_{\parallel i}/T_{\perp i}$, $\mu \equiv m_e/m_i$; здесь правые неравенства учитывают ограничение на плотность сверху [условие (13.6)].

Для нерезонансной неустойчивости вместо (13.11) и (13.12) имеем

$$(\eta_e, \eta_i) < \mu/\cos^2 \theta, \quad (13.13)$$

где $\cos^2 \theta$ лежит в заштрихованной области рис. 13.2. Максимум правой части (13.13) достигается при $\cos^2 \theta$, прилегающих к границе неустойчивости. В случае плазмы с $b_i < \mu^{1/2}$ эта граница дается формулой (13.8), и тогда из (13.13) следует

$$(\eta_e, \eta_i) < b_i. \quad (13.14)$$

При больших значениях параметра b_i величина $(\cos \theta)_{\min}$ не зависит от плотности [см. (13.10)]; в этом случае вместо (13.14) получаем критерий

$$(\eta_e, \eta_i) < \mu^{1/2}. \quad (13.15)$$

Из оценок (13.11) — (13.15) видно, что рассмотренная выше гидродинамическая раскачка ионно-циклотронных колебаний возможна только при условии, что анизотропия распределения ионов по энергиям достаточно велика и что электроны существенно холоднее ионов.

§ 13.2. Разреженная плазма с холодными электронами и конечным $T_{\parallel i} / T_{\perp i}$

Считаем, как и в § 13.1, электроны холодными, $T_e \rightarrow 0$, но учитываем продольную температуру ионов. Используя выражение для $\epsilon_0^{(i)}$ вида (5.26), приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = 1 - \left(\frac{\omega_{pe} \cos \theta}{\omega} \right)^2 + \frac{I_n \exp(-z_i)}{k^2 d_{\parallel i}^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{T\parallel i}} \left[1 - \frac{n \omega_{Bi}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times W \left(\frac{\omega - n \omega_{Bi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Пусть продольная температура не удовлетворяет условиям (13.12) — (13.15). Тогда рассмотренные в § 13.1 неустойчивости гидродинамического типа отсутствуют. В этих условиях может иметь место кинетическая неустойчивость. Из (13.16) находим ее инкремент

$$\begin{aligned} \gamma = - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(n \omega_{Bi})^2}{|k_z| v_{T\parallel i}} \cdot \frac{I_n \exp(-z_i)}{k^2 d_{\parallel i}^2} \times \\ \times \left[1 - \frac{n \omega_{Bi}}{\omega_k} \left(1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right) \right] \exp \left[- \left(\frac{\omega_k - n \omega_{Bi}}{k_z v_{T\parallel i}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (13.17)$$

где $\omega_k = \omega_{pe} \cos \theta$. Максимум инкремента достигается при

$$\frac{\omega - n \omega_{Bi}}{n \omega_{Bi}} = - \frac{1}{2} \left[\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} + \sqrt{\left(\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right)^2 + 2 \left(\frac{k_z v_{T\parallel i}}{n \omega_{Bi}} \right)^2} \right]. \quad (13.18)$$

Этот максимум неэкспоненциально мал, если

$$\eta_i \lesssim k_z \rho_{\parallel i} / n, \quad \rho_{\parallel i} \equiv v_{T\parallel i} / \omega_{Bi}. \quad (13.19)$$

С помощью (13.19) и неравенства, обратного (13.12), находим условия, при которых в плазме может развиваться кинетическая неустойчивость с неэкспоненциально малым инкрементом:

$$b_i / \mu^{1/3} < \eta_i < \mu / b_i. \quad (13.20)$$

Пределы изменения параметра $T_{\parallel i} / T_{\perp i}$, определяемые неравенствами (13.20), изображены на рис. 13.4. Здесь же указано соответствие между обсуждаемой кинетической и рассмотренными в § 13.1 гидродинамическими неустойчивостями. Видно, что кинетическая неустойчивость может развиваться только при таких плотностях, при которых возможна и резонансная гидродинамическая. Этот результат находится в соответствии с представлениями о взаимосвязи гидродинамических и кинетических неустойчивостей, изложенными в § 3.2.

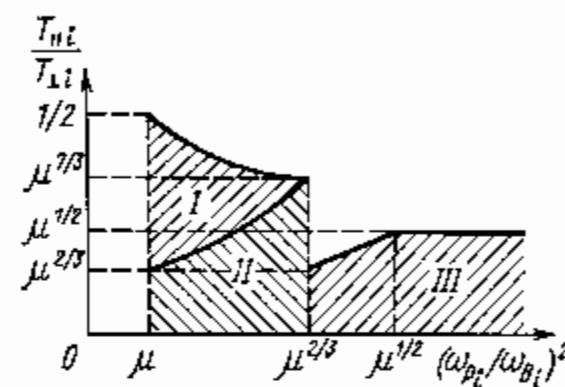


Рис. 13.4. Соответствие между гидродинамической и кинетической неустойчивостями в плазме с конечным отношением $T_{\parallel i} / T_{\perp i}$ и $T_e \rightarrow 0$. Здесь $\mu \equiv m_e / m_i$: I — кинетическая неустойчивость; II — гидродинамическая резонансная неустойчивость; III — гидродинамическая нерезонансная неустойчивость.

По порядку величины кинетический инкремент равен

$$\gamma \simeq (b_i / \eta_i) \omega_{Bi}. \quad (13.21)$$

Входящие сюда параметры η_i , b_i лежат в пределах (13.20), или, что то же самое, в соответствующей заштрихованной области рис. 13.4.

Приближение холодных электронов оправдано, если выполнен критерий (13.11). При условии, обратном (13.11), плазма с $b_i \ll 1$ и не слишком малым η_i [условие, обратное (13.12)], устойчива.

§ 13.3. Разреженная сильноанизотропная плазма с конечной температурой электронов

При конечном $k_z v_{Te}$ и $k_z v_{Ti} / (\omega - n\omega_{Bi}) \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{1}{k^2 d_e^2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) \right] - \frac{\omega_{pi}^2 I_n \exp(-z_i) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega_{Bi} (\omega - n\omega_{Bi})} - \frac{n I_n \exp(-z_i)}{z_i} = 0. \quad (13.22)$$

Как и в (13.16), здесь пренебрежено низкочастотной продольной инерцией ионов (членом с $I_0 \exp(-z_i)/\omega^2$), важной в случае $T_e \gg T_{\perp i}$ и $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$. Этот эффект учитывается ниже, в § 13.4. Кроме того, в (13.22) опущено полное слагаемое $\sim (k d_{\perp i})^{-2}$. При $T_e \ll T_{\perp i}$ и $\omega \ll k_z v_{Te}$ оно мало по сравнению с электронным. При $z_i \simeq 1$ и $k_z \ll k_{\perp}$ электронный вклад в (13.22) по порядку величины равен b_i/η_e .

Пусть

$$b_i \ll \eta_e. \quad (13.23)$$

В этом случае в $\epsilon_0^{(e)}$ достаточно учесть только его мнимую часть. Она мала по сравнению с вещественными членами уравнения, так что частоту и инкремент колебаний можно определить с помощью (2.16) и (2.17). При $\cos \theta > \omega_{pi}/\omega_{Bi}$, когда не важен последний член левой части (10.22), имеем:

$$\omega_k^{(\pm)} = n\omega_{Bi} \pm |\omega_{pi} \cos \theta| (I_n \exp(-z_i))^{1/2}; \quad (13.24)$$

$$\gamma_k^{(\pm)} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n\omega_{Bi} |\omega_{pi} \cos \theta|}{|k_z| v_{Te} k^2 d_e^2} \exp \left[- \left(\frac{n\omega_{Bi}}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right]. \quad (13.25)$$

Возмущения с частотой $\omega^{(+)}$ затухают, $\gamma < 0$, а с $\omega = \omega^{(-)}$ — раскачиваются, $\gamma > 0$ (для определенности полагаем $n\omega_{Bi} > 0$). Затухание и нарастание колебаний обусловлено взаимодействием с последними резонансных электронов. В обоих случаях электроны отбирают энергию у волны. Это вытекает из уравнения баланса энергии колебаний (2.18) и выражения для ϵ_0 (13.22). Отбор резонансными частицами энергии колебаний ветви $\omega = \omega^{(-)}$

приводит к нарастанию амплитуды этих колебаний вследствие отрицательности их энергии W_k . В этом можно убедиться с помощью соотношений (13.22), (13.24) и (2.19). Подробный анализ баланса энергии колебаний с $W_k < 0$ приводился в § 2.3.

Качественно зависимость инкремента анизотропной неустойчивости от $\eta_e \equiv T_e/T_{\perp i}$ изображена на рис. 13.5. При очень малых η_e величина γ определяется гидродинамическими соотношениями, приведенными в § 13.1. Рис. 13.5, б соответствует таким плотностям, при которых возможны и резонансная и нерезонансная гидродинамические неустойчивости. Поэтому изображенная на нем картина выглядит так же, как и в случае пучковой неустойчивости (ср. с рис. 3.4). При $b_i < \mu$ единственным типом неустойчивости является кинетическая [см. рис. 13.5, а]. В плазме с $b_i < \mu^{2/3}$ [критерий, обратный (13.6)] и $\eta_e \rightarrow 0$ возможна только нерезонансная гидродинамическая неустойчивость. Поэтому рис. 13.5, в, соответствующий этому интервалу плотностей, отличается от рис. 13.5, б.

При условии, обратном (13.23), решение (13.22) таково:

$$\omega = n\omega_{Bi} \pm \pm k_z \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{(I_n \exp(-z_i))^{1/2}}{\left[1 - i \sqrt{\pi} \frac{n\omega_{Bi}}{|k_z| v_{Te}} W \left(\frac{n\omega_{Bi}}{|k_z| v_{Te}} \right) \right]^{1/2}}. \quad (13.26)$$

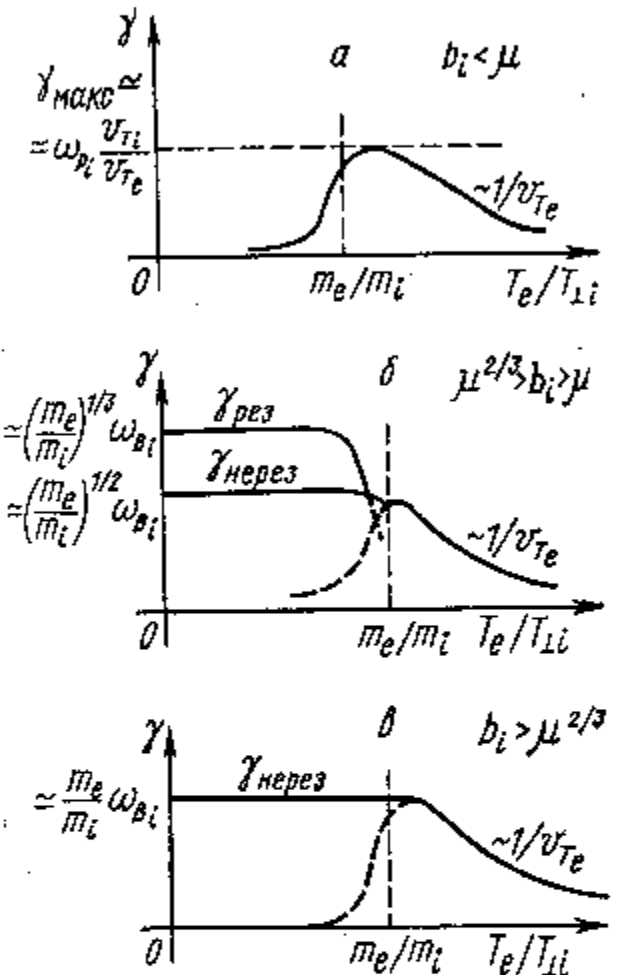


Рис. 13.5. Инкременты неустойчивостей разреженной плазмы с конечной температурой электронов для разных значений параметра $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 \equiv b_i$. Здесь $\mu \equiv m_e/m_i$

Видно, что в этом пределе ω не зависит от плотности. Частота и инкремент возмущений с $k_z > n\omega_{Bi}/v_{Te}$ равны:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= n\omega_{Bi} - k_z (T_e/m_i)^{1/2} (I_n \exp(-z_i))^{1/2}, \\ \gamma &= \left(\frac{\pi}{8} \cdot \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} n\omega_{Bi} (I_n \exp(-z_i))^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

Качественно зависимость инкремента от плотности, вытекающая из (13.25) и (13.27), представлена на рис. 13.6.

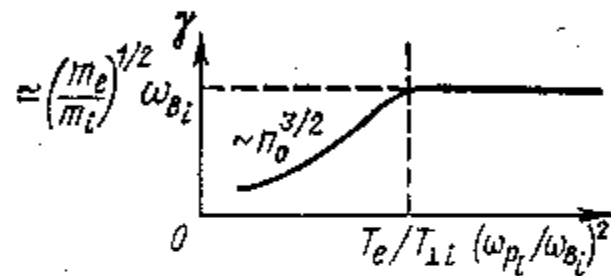


Рис. 13.6. Зависимость кинетического инкремента от плотности в плазме с конечным $T_e/T_{\perp i}$

Рассмотренная выше неустойчивость возможна только в плазме с достаточно малым η_i . При условии (13.23), когда частота колебаний удовлетворяет соотношению (13.24), критерий малости η_i совпадает с (13.14). В противном случае, т. е. при $\eta_e < b_i$, с помощью (13.27) находим, что неравенство $|\omega - n\omega_{Bi}| \gg k_z v_{T\perp i}$ означает

$$\eta_i \ll b_i. \quad (13.28)$$

В силу принятого при выводе (13.22) предположения $b_i \ll 1$ из (13.28) следует $\eta_i \ll 1$.

§ 13.4. Плотная плазма с конечной температурой электронов

1. Неустойчивость сильноанизотропного распределения ионов, $T_{\parallel i}/T_{\perp i} \rightarrow 0$. При $T_{\parallel i}/T_{\perp i} \rightarrow 0$ и $\omega \ll \ll k_z v_{Te}$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} - \omega_{pi}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{I_n \exp(-z_i) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} + \frac{n I_n \exp(-z_i) \sin^2 \theta}{z_i \omega_{Bi} (\omega - n\omega_{Bi})} \right] = 0. \quad (13.29)$$

С точностью до обозначений оно совпадает с (8.29). В предположении, что $\cos \theta$ не слишком мал и что $\omega \approx n\omega_{Bi}$,

(13.29) упрощается [ср. с (8.40)]:

$$1 + (kd_e)^{-2} + \frac{1 - I_0 \exp(-z_i)}{k^2 d_{\perp i}^2} - \left(\frac{\omega_{pi} \cos \theta}{\omega} \right)^2 I_0 \exp(-z_i) - \frac{\omega_{pi}^2 I_n \exp(-z_i) \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} = 0. \quad (13.30)$$

В приближении $I_n/I_0 \ll 1$, справедливом при $z_i \ll 1$, две из четырех ветвей колебаний, описываемых (13.30), являются циклотронными, а две другие — ионно-звуковыми. Частота последних при не слишком малом $\omega - n\omega_{Bi}$ удовлетворяет соотношению [ср. с (6.28)]:

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 T_e}{m_i} \cdot \frac{I_0 \exp(-z_i)}{1 + k^2 d_e^2 + \eta_e (1 - I_0 \exp(-z_i))}. \quad (13.31)$$

Вследствие условия $\eta_i \ll 1$ возмущения типа (13.31) являются слабозатухающими, $\omega/k_z \gg v_{T\perp i}$, даже в плазме с не очень большой температурой электронов: $T_e < T_{\perp i}$ (однако для этого все же должно быть $T_e \gg T_{\parallel i}$).

При пересечении ветвей (13.31) с циклотронными частота возмущений оказывается комплексной, причем одна из пересекающихся ветвей имеет $\gamma > 0$. Максимальный инкремент возмущений с $k_{\perp} \rho_{\perp i} \approx 1$ порядка циклотронной частоты [ср. с (8.33)]:

$$\gamma_{\text{макс}} \lesssim \omega_{Bi}/2. \quad (13.32)$$

Частота (13.31) может достигать ионно-циклотронной только при [ср. с (8.35)]

$$b_i > 1. \quad (13.33)$$

Это необходимое условие неустойчивости. Зависимость критической плотности от параметра $k_{\perp} \rho_{\perp i}$ имеет вид, аналогичный рис. 8.2.

Таким образом, гидродинамическая неустойчивость плазмы с анизотропными ионами и горячими электронами возможна только при не слишком малой плотности, критерий (13.33).

Наименьшее значение плотности, при которой еще возможна неустойчивость, соответствует возмущениям с $(k_{\perp} \rho_{\perp i})^2 \gg T_{\perp i}/T_e$. В этом случае, как видно из (13.29) или (13.31), электронные члены полностью выпадают из дисперсионного уравнения и последнее становится точно таким же, как и в случае электроно-циклотронных коле-

башей (с заменой $m_i \rightarrow m_e$, $e_i \rightarrow e_e$). Поэтому необходимое условие ионной неустойчивости (13.33) с точностью до индексов совпадает с (8.35). Численно же эти критерии отличаются отношением масс.

2. Неустойчивость плазмы с конечным $T_{\parallel i}/T_{\perp i}$. При конечных $T_{\parallel i}/T_{\perp i}$ необходимо учитывать взаимодействие колебаний с резонансными частицами. С помощью (5.26) при условиях

$$|\omega - n\omega_{Bi}| \gg k_z v_{T\parallel i}, \quad k_z v_{T\parallel i} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$$

находим дисперсионное уравнение, которое в нулевом приближении по указанным параметрам разложения совпадает с (13.30), а при учете конечности последних отличается от (13.30) наличием в левой части слагаемого

$$i \operatorname{Im} \epsilon_0 = \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te} k^2 d_e^2} + \frac{i \sqrt{\pi} \omega I_0 \exp(-z_i) \exp[-(\omega/k_z v_{T\parallel i})^2]}{k^2 d_{\parallel i}^2 |k_z| v_{T\parallel i}} + \\ + \frac{i \sqrt{\pi} \left[\omega - n\omega_{Bi} \left(1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right) \right]}{|k_z| v_{T\parallel i} k^2 d_i^2} \times \\ \times I_n \exp(-z_i) \exp \left[- \left(\frac{\omega - n\omega_{Bi}}{k_z v_{T\parallel i}} \right)^2 \right]. \quad (13.34)$$

Первый член соответствует резонансным электронам, второй — черенковскому резонансу на ионах, и последний — ионно-циклотронному резонансу. Если решения (13.30) вещественны, раскачка или затухание колебаний определяется знаком $\operatorname{Im} \epsilon_0$ (ср. с § 8.3). В пренебрежении электронным резонансом из (13.34) получается критерий неустойчивости [ср. с (8.49)]:

$$T_{\perp i} > 2T_{\parallel i}. \quad (13.35)$$

Из сравнения первого и последнего членов правой части (13.34) находим, что неустойчивость возможна (т. е. электронный резонанс несуществен), если только

$$\eta_e > \mu^{1/3}. \quad (13.36)$$

Инкремент кинетической ионной неустойчивости определяется формулой, аналогичной (8.50). При $T_{\perp i} \gg 2T_{\parallel i}$ он порядка (13.32), а при $T_{\perp i} \simeq 2T_{\parallel i}$ — экспоненциально мал.

Библиографический обзор к гл. 13

1. Parris E. G. Unstable plasma oscillations in a magnetic field.— «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 34.
Здесь указана возможность развития неустойчивостей в анизотропной плазме нулевого давления.
2. Тимофеев А. В. Раскачка ионных звуковых колебаний в анизотропной плазме.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 397.
Исследуется ионно-звуковая неустойчивость анизотропной плазмы (§ 13.4).
3. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О циклотронной неустойчивости плазмы с сильноанизотропным распределением ионов и холодными электронами (§ 13.1—13.3).— «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 176.
4. Пистунович В. И. Циклотронная неустойчивость плазмы в «Огре».— «Атомная энергия», 1963, т. 14, с. 72.
Вычислен максимальный инкремент ионно-циклотронной неустойчивости разреженной плазмы [формула (13.3)].
5. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Пистунович В. И. О циклотронной неустойчивости плазмы.— «Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 30.
Проводится аналитическое и численное исследование ионно-циклотронной неустойчивости плазмы с холодными электронами.
6. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. Возбуждение продольных колебаний в плазме с изотропным распределением ионов по скоростям.— «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1013.
7. Пистунович В. И., Тимофеев А. В. К вопросу о нагреве электронов в анизотропной плазме.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, с. 779.
В работах [6, 7] исследуется неустойчивость плазмы с анизотропными ионами, обязанная поглощению энергии резонансными электронами (§ 13.3).
8. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 2266.
Показано, что колебания плазмы с сильноанизотропными ионами могут иметь отрицательную энергию (§ 13.3).
9. Hall S., Heckrotte W., Kammash T. Ion cyclotron electrostatic instabilities.— «Phys. Rev.», 1965, v. A139, p. 1117.
Проводится подробное исследование основных типов неустойчивостей анизотропной плазмы.
10. Soper G. K., Parris E. G. Effect of finite ion and electron temperatures in the ion-cyclotron resonance instability.— «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 984.
Проводится численный анализ границ анизотропной неустойчивости.
11. Guest G. E., Dory R. A. Microinstability of a mirror-confined plasma.— «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1853.
Исследуются неустойчивости анизотропии плазмы.
12. Тимофеев А. В., Пистунович В. И. Циклотронная неустойчи-

вость анизотропной плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 351.

Дается подробный обзор основных типов неустойчивостей анизотропной плазмы.

ГЛАВА 14

РАСКАЧКА ИОННО-ЦИКЛОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ С ПОПЕРЕЧНО-НЕМАКСВЕЛЛОВСКИМИ ИОНАМИ

§ 14.1. Неустойчивости плазмы с холодными электронами

Одной из причин раскачки ионно-циклотронных колебаний является неравномерность распределения ионов по поперечным скоростям. В этой главе мы разберем некоторые примеры такой раскачки. Сначала рассмотрим плазму с холодными электронами, а затем — с конечной температурой электронов.

1. Гидродинамическая раскачка колебаний с $\omega \approx n\omega_{Bi}$. В § 12.1 была рассмотрена неустойчивость плазмы большой плотности $\omega_{pi}^2/\omega_{Bi}^2 \equiv b_i \gg 1$. Теперь будем считать $b_i \ll 1$. Возмущенным движением ионов вдоль магнитного поля пренебрегаем (оно учитывается в последующих пунктах). В этом приближении $\epsilon_0^{(i)}$ имеет вид (5.22) с $k_z = 0$. Электроны считаем холодными, $\omega/k_z \gg v_{Te}$. При малой плотности плазмы $\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 \ll 1$, $\epsilon_0^{(e)} = -(\omega_{pe} \cos \theta/\omega)^2$. Поэтому исходное дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \left\langle \frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (14.1)$$

Уравнение аналогичного типа [см. (9.22)] исследовалось в п. 1 § 9.3. Используя эту аналогию, заключаем, что плазма неустойчива, если при каком-нибудь значении волнового числа k_{\perp} выполняется условие [ср. с (9.23)]

$$\cos \theta \approx n \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pe}} \gg n \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}}. \quad (14.2)$$

Инкремент колебаний равен

$$\gamma = \omega_{pi} \sqrt{-\left\langle \frac{J_n J'_n}{\xi} \right\rangle}. \quad (14.3)$$

В отличие от случая, рассмотренного в п. 1 § 9.3, могут раскачиваться не только высшие циклотронные гармоники ($\omega \approx n\omega_{Bi}$, $n = 2, 3, \dots$), но и первая, $\omega \approx \omega_{Bi}$.

Функция $\langle -J_n J'_n / \xi \rangle$ может быть положительной лишь при $\bar{\xi} \equiv \bar{v}_{\perp} k_{\perp} / \omega_{Bi} > 1$, где \bar{v}_{\perp} — некоторое эффективное значение поперечной скорости. Следовательно, раскачиваться могут только коротковолновые возмущения, $k_{\perp} > > 1/\rho_i$. В случае анизотропной раскачки, рассмотренной в гл. 13, это условие не обязательно. Наиболее неустойчивым является δ -функциональное распределение. К числу неустойчивых относятся также ионные распределения типа (8.69).

Согласно (14.3), инкремент увеличивается с ростом плотности, достигая величины порядка $\gamma \simeq \omega_{Bi}$ при

$$b_i \simeq \frac{1}{|\langle J_n^2 \rangle / \xi|} \gg 1. \quad (14.4)$$

При больших плотностях из (14.3) следует $\gamma > \omega_{Bi}$. Однако в этом случае (14.3) теряет силу, так как в исходном уравнении (14.1) важны сразу несколько членов суммы (ср. с п. 2 § 9.3). Учет большого числа слагаемых, необходимый при $b_i \gg 1$, соответствует высокочастотному приближению § 12.1.

Выше мы пренебрегали продольным движением ионов. В случае плазмы с приближенно изотропным распределением частиц по продольным и поперечным скоростям, $\bar{v}_{\perp}^2/2 \simeq \bar{v}_{\parallel}^2$, это законно, если $|\omega - n\omega_{Bi}| > k_z v_{Ti}$. Используя (14.2) и (14.3), находим, что наши результаты для такой плазмы справедливы, если только

$$b_i > (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (14.5)$$

Менее плотную плазму с $\bar{v}_{\perp}^2/2 \simeq \bar{v}_{\parallel}^2$ рассмотрим в п. 2.

В случае сильноанизотропной плазмы ($\bar{v}_{\perp}^2 \rightarrow 0$) пренебрежение продольным движением ионов означает $\gamma/\omega_{Bi} \gg \gg \cos^2 \theta$. Это условие обратно уже встречавшемуся условию (13.5), при котором продольное движение ионов важно. Видно, что в случае сильноанизотропной плазмы область применимости (14.2) и (14.3) шире, чем в случае изотропной [ср. с (14.5)]:

$$b_i > (m_e/m_i)^{2/3}. \quad (14.6)$$

Анизотропная плазма с $\partial f_0/\partial v_{\perp} > 0$ при условии, обратном (14.6), рассматривается в п. 3.

Уравнение (14.1) может иметь комплексные решения и при $\cos \theta$, меньшем, чем по условию (14.2). Этот вопрос обсуждается в § 14.2.

Принятое выше приближение холодных электронов оправдано, если $\omega > k_z v_{Te}$. Учитывая (14.2) и полагая $n \simeq 1$, $k_{\perp} \simeq 1/\rho_i$, находим, что для этого должно быть

$$T_e/m_i v_0^2 \ll b_i. \quad (14.7)$$

На границе применимости приближения дискретного спектра циклотронных гармоник при $b_i \simeq 1$ критерий (14.7) совпадает с высокочастотным критерием (12.32). Критерий типа (14.7) встречался также при рассмотрении устойчивости анизотропной плазмы [см. первое неравенство (13.14)].

Устойчивость плазмы при условии, обратном (14.7), обсуждается в § 14.2.

2. Кинетическая неустойчивость плазмы с $\bar{v}_{\perp}^2/2 \simeq \bar{v}_{\parallel}^2$. Пусть выполнено условие, обратное (14.5):

$$b_i < (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (14.8)$$

Тогда необходимо учитывать продольный тепловой разброс ионов и считать $|\omega - n\omega_{Bi}| < k_z v_{T\parallel i}$. Диэлектрическую проницаемость ионов находим с помощью (5.22). Инкремент колебаний, максимальный при условии (14.2), определяется формулой:

$$\gamma_{\text{макс}}^{\text{кин}} = \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pi}^2}{|k_z| v_{T\parallel i}} n^2 \sin^2 \theta \left\langle -\frac{J_n J'_n}{\xi} \right\rangle. \quad (14.9)$$

По порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}}^{\text{кин}} \simeq (m_i/m_e)^{1/2} b_i^{3/2} \omega_{Bi}. \quad (14.10)$$

На границе применимости ($k_z v_{T\parallel i} \simeq \omega_{pi}$, $b_i \simeq (m_e/m_i)^{1/2}$) выражения (14.3) и (14.10) по порядку величины совпадают; при этом

$$\gamma \simeq (m_e/m_i)^{1/4} \omega_{Bi}. \quad (14.11)$$

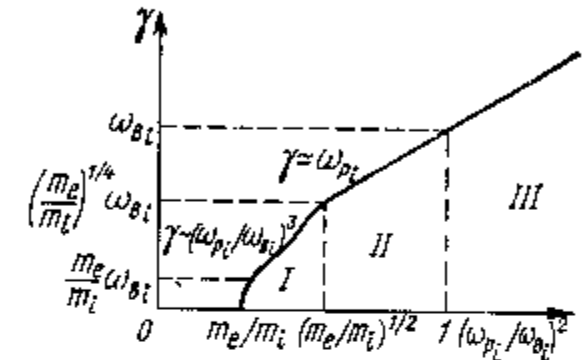
Зависимость инкремента от плотности, вытекающая из (14.3) и (14.10), представлена на рис. 14.1. Учтено также, что неустойчивость отсутствует при $b_i < m_e/m_i$ [в этом случае не удовлетворяется условие (14.2)]. При $b_i > 1$

инкремент определяется формулой (12.3) высокочастотного приближения § 12.1.

Результаты этого пункта справедливы при условии, что температура электронов достаточно мала — критерий (14.7).

Рис. 14.1. Зависимость γ от $b_i \equiv (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$ для плазмы с $\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} > 0$, $\bar{v}_{\perp}^2/2 \simeq \bar{v}_{\parallel}^2$, $T_e \rightarrow 0$:

I — кинетическая неустойчивость, § 14.2; II — гидродинамическая раскачка циклотронных колебаний, п. 1 § 14.1; III — высокочастотная неустойчивость, § 12.1



3. Неустойчивость анизотропной плазмы с $\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} > 0$. При учете возмущенного продольного движения ионов дисперсионное уравнение колебаний сильноанизотропной плазмы ($v_{T\parallel i} \rightarrow 0$) имеет вид [ср. с (13.1)]

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \omega_{pi}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{n \left\langle \frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle}{\omega_{Bi} (\omega - n\omega_{Bi})} + \frac{\langle J_n^2 \rangle \cos^2 \theta}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} \right] = 0. \quad (14.12)$$

При условии (14.6) это уравнение было исследовано в п. 1, а при обратном условии — в § 13.1, см. (13.6). Для

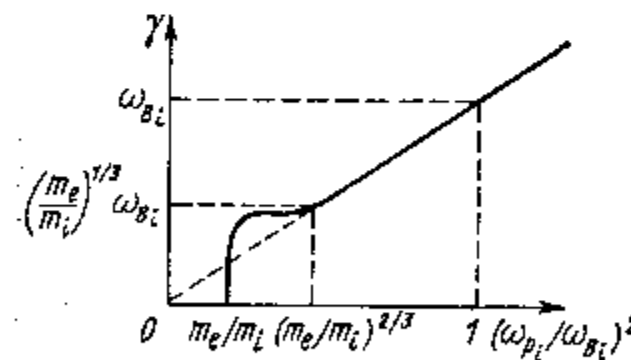


Рис. 14.2. Зависимость $\gamma = \gamma(b_i)$ для сильноанизотропной плазмы с $\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} > 0$ при $T_e \rightarrow 0$

плазмы с равновесным поперечным распределением по скоростям, $\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} < 0$, рассмотренной в § 13.1, условии (14.5) означает невозможность гидродинамической раскачки колебаний с $\omega \approx \omega_{pe} \cos \theta \approx n\omega_{Bi}$. (Напомним, что таким колебаниям соответствует максимальный инкремент.) Видно, что при $\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} > 0$

[точнее, при $f_{\perp i}$, удовлетворяющем соотношению (9.24)], условие (13.6) имеет иной смысл: при его выполнении раскачка колебаний с $\omega \approx \omega_{pe} \cos \theta \approx n\omega_{Bi}$ обязана

анизотропии ионов, а при обратном условии — неравно-
весности поперечного ионного распределения.

Зависимость инкремента от плотности для сильноани-
зотропной плазмы с $\partial f_{\perp i} / \partial v_{\perp} > 0$ показана на рис. 14.2.
При $b_i < (m_e/m_i)^{2/3}$ эта зависимость такая же, как и на
рис. 13.3. Если анизотропия плазмы не очень велика, то
закон $\gamma \simeq (m_e/m_i)^{2/3} \omega_{Bi}$ нарушается при плотности боль-
шей, чем соответствующее указанному на рис. 13.3 значе-
ние $b_i = m_e/m_i$ (см. § 13.2).

§ 14.2. Неустойчивости плотной плазмы с горячими электронами

1. Приближение $T_e \rightarrow \infty$. Даже если темпера-
тура электронов весьма велика, плотная плазма все же
может быть неустойчивой относительно возмущений
с $\omega \ll \omega_{Bi}$. В пределе бесконечно горячих электронов,
 $T_e \gg m_i v_{Te}^2$, имеем дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \langle 2J_n J'_n / \xi \rangle}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (14.13)$$

Это уравнение отличается от исследованного в § 8.4 [урав-
нение $\epsilon_0 = 0$ с ϵ_0 вида (8.53)] только индексами сорта за-
рядов. Оно описывает нарастающие возмущения, $\gamma > 0$,
если в соответствии с (8.68)

$$b_i > \frac{1}{\langle (J_0^2) / \xi \rangle} > 0. \quad (14.14)$$

Инкремент возмущений не превосходит ω_{Bi} , $\gamma \ll \omega_{Bi}$.

Класс неустойчивых распределений, удовлетворяющих
условию (14.14), обсуждался в § 8.4. Он уже класса рас-
пределений, неустойчивых относительно высокочастотных
возмущений, которые развиваются в плотной плазме при
 $T_e \rightarrow 0$ (см. § 12.1).

В соответствии с (8.57) ионное распределение δ -функ-
ционального типа неустойчиво при

$$b_i > 17. \quad (14.15)$$

Рассматриваемая здесь низкочастотная неустойчивость
может развиваться в плазме с холодными электронами при
 $k_z = 0$. Однако ввиду малости инкремента низкочастотная

неустойчивость может играть роль в такой плазме лишь
в случае, если какие-либо дополнительные факторы при-
водят к стабилизации высокочастотных возмущений. По-
следнее, в частности, может иметь место при недостаточно
большой длине плазмы, когда неустойчивые возмущения
с $k_z = 0$ являются единственно возможными.

**2. Раскачка циклотронных колебаний резонансными
электронами.** В условиях, когда дисперсионное уравнение
(14.13) не имеет комплексных решений, для получения
истинной картины устойчивости необходимо учесть взаи-
модействие колебаний с резонансными электронами.

Полагаем $\omega \ll k_z v_{Te}$, $\omega \approx n\omega_{Bi}$. Дисперсионное урав-
нение записывается в виде

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left(1 + \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{|k_z|v_{Te}} \right) + \\ + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \right)^2 \left[\left\langle \frac{2J_0 J_1}{\xi} \right\rangle - \frac{n\omega_{Bi} \langle 2J_n J'_n / \xi \rangle}{\omega - n\omega_{Bi}} \right] = 0. \quad (14.16)$$

Членами $1 + (kd_e)^{-2}$ в ϵ_0 пренебрегаем, полагая $b_i \gg 1$,
 $T_e \gg m_i (v_{\perp 1}^2)_i$. (Оценки производятся в предположении
 $\xi \simeq 1$; следует, однако, иметь в виду, что ξ может в не-
сколько раз превышать единицу.)

С помощью (14.6) находим

$$\text{Re } \omega = n\omega_{Bi} \left(1 + \left\langle \frac{J_n J'_n}{\xi} \right\rangle / \left\langle \frac{J_0 J_1}{\xi} \right\rangle \right), \\ \gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(n\omega_{Bi})^2}{|k_z|v_{Te} (k^2 T_e / m_i \omega_{Bi}^2)} \frac{\langle J_n J'_n / \xi \rangle}{\langle J_0 J_1 / \xi \rangle^2}. \quad (14.17)$$

Здесь следует считать $\langle J_0 J_1 / \xi \rangle > 0$, так как в противном
случае возможна более сильная неустойчивость, рассмот-
ренная в предыдущем пункте. При нахождении инкре-
мента предполагалось $\gamma \ll |n\omega_{Bi} - \omega|$ и использовалось
соотношение (2.17).

Инкремент положителен, если $\langle J_n J'_n / \xi \rangle < 0$ [критерий
(9.24)]. В этом случае колебания имеют отрицатель-
ную энергию. $\omega_i \partial \text{Re } \epsilon_0 / \partial \omega_k < 0$ (см. § 2.3). Раскачка
колебаний осуществляется путем отбора их энергии резо-
нансными электронами (ср. с § 13.3).

Максимум инкремента как функции k_z достигается при
 $k_z \simeq n\omega_{Bi} / v_{Te}$, т. е. на пределах применимости приближе-

ния $\omega \ll k_z v_{Te}$. При этом по порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \omega_{Bi} m_i v_{\perp i}^2 / T_e. \quad (14.18)$$

Этот результат относится к плазме с $T_e \gg m_i v_{\perp i}^2$, $b_i \gg 1$. На пределах применимости этих неравенств, т. е. при $T_e \simeq m_i v_{\perp i}^2$, $b_i \simeq 1$, инкремент (14.18) и полученный в обратном предельном случае инкремент (14.3) по порядку величины совпадают.

§ 14.3. Раскачка циклотронных колебаний резонансными электронами в разреженной плазме

При $\omega_{pi} < \omega_{Bi}$ и достаточно холодных электронах [критерий (14.7)] в плазме могут развиваться неустойчивости, рассмотренные в § 14.1. Пусть, однако, температура электронов удовлетворяют условию, обратному (14.7):

$$T_e > b_i m_i \bar{v}_{\perp i}^2 / 2. \quad (14.19)$$

При этом указанные неустойчивости невозможны. Возможна, однако, раскачка колебаний резонансными электронами типа рассмотренной в п. 2 § 14.2. Перейдем к исследованию этой неустойчивости.

Исходим из дисперсионного уравнения (14.16), учитывая в ϵ_0 единицу и пренебрегая членом $(kd_e)^{-2}$ и членами порядка b_i . При этих условиях вместо (14.17) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= n\omega_{Bi} \left[1 + b_i \left(\frac{2J_n J'_n}{\xi} \right) \right], \\ \gamma &= \frac{\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{Te}} \left(\frac{n\omega_{Bi}}{kd_e} \right)^2 \left\langle -\frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

Неустойчивость имеет место в случае такого же класса ионных распределений, как и в § 14.2, $\langle J_n J'_n / \xi \rangle < 0$. Аналогичен указанному в § 14.2 и механизм неустойчивости.

Инкремент максимален при $k_z \simeq n\omega_{Bi} / v_{Te}$, по порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}} \simeq \omega_{Bi} b_i^2 m_i v_{\perp i}^2 / T_e. \quad (14.21)$$

С уменьшением b_i становится важным продольное движение ионов, которое при $\bar{v}_{\perp i}^2 / 2 \simeq \bar{v}_{\parallel i}^2$ приводит к ста-

билизации плазмы. По порядку величины последнее имеет место при плотности, удовлетворяющей условию

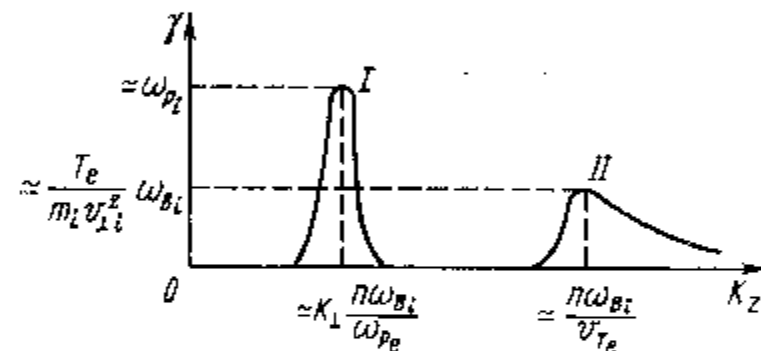
$$b_i \leq \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i v_{\perp i}^2}{T_e} \right)^2. \quad (14.22)$$

§ 14.4. Раскачка колебаний резонансными электронами в плазме умеренной плотности

При выполнении указанного неравенства в плазме могут развиваться неустойчивости гидродинамического типа, см. § 12.1 и 14.1. Однако для этого длина плазмы

Рис. 14.3. Неустойчивости плазмы с

$T_e / m_i \bar{v}_{\perp i}^2 < < (\omega_{pi} / \omega_{Bi})^2 < 1$;
I — циклотронная гидродинамическая неустойчивость, п. 1 § 14.1;
II — циклотронная вневихевая неустойчивость, § 14.4



должна быть относительно большой (малые k_z). В случае более короткой плазмы необходимо принимать во внимание также неустойчивости с $\omega \lesssim k_z v_{Te}$. Дисперсионное уравнение (14.16) при этом сводится к виду

$$\frac{1}{(kd_e)^2} \left(1 + i \frac{\sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te}} \right) - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \right)^2 \frac{n\omega_{Bi}}{\omega - n\omega_{Bi}} \left\langle \frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle = 0. \quad (14.23)$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= n\omega_{Bi} \left(1 + \frac{k^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2} \left\langle \frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle \right); \\ \gamma &= \frac{\sqrt{\pi} (n\omega_{Bi})^2}{|k_z| v_{Te}} \cdot \frac{k^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2} \left\langle -\frac{2J_n J'_n}{\xi} \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

Максимальный инкремент оцениваем, полагая $k_z \simeq n\omega_{Bi} / v_{Te}$, $k_{\perp} \simeq 1/\rho_i$. Тогда

$$\gamma_{\text{макс}}^{\text{кин}} \simeq \frac{T_e}{m_i v_{\perp i}^2} \omega_{Bi}. \quad (14.25)$$

Соотношение между кинетической и гидродинамической неустойчивостями иллюстрируется рис. 14.3 (в случае $\omega_{pi} < \omega_{Bi}$).

§ 14.5. Суммирование результатов, полученных в § 14.1-14.4

Соответствие между основными типами неустойчивостей плазмы с $\partial f_{oi}/\partial v_{\perp} > 0$, $(\bar{v}_{\perp}^2/2)_i \simeq (\bar{v}_{\parallel}^2)_i$ представлено на рис. 14.4. Здесь по оси абсцисс отложена относительная плотность $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$, а по оси ординат — относительная электронная температура $T_e/m_i \bar{v}_{\perp i}^2$.

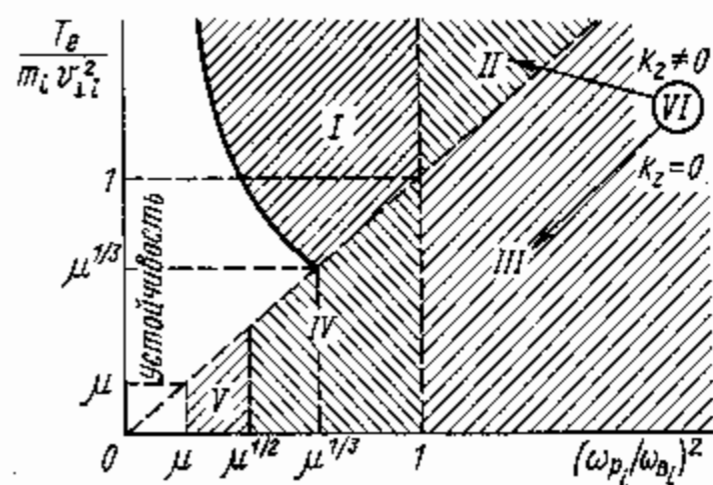


Рис. 14.4. Диаграмма неустойчивостей плазмы с поперечно-немаксвелловскими ионами:

I — циклотронная неустойчивость, § 14.3; II — циклотронная неустойчивость, § 14.4; III — высокочастотная неустойчивость, § 12.4; IV — гидродинамическая циклотронная неустойчивость, п. 1 § 14.1; V — кинетическая циклотронная неустойчивость, п. 2 § 14.2; VI — неустойчивость, рассмотренная в п. 1 § 14.2. Здесь $\mu \equiv m_e/m_i$.

При большой плотности плазмы и малой температуре электронов может развиваться высокочастотная неустойчивость, § 14.1 (см. правую нижнюю часть рисунка). С уменьшением плотности она вначале сменяется гидродинамической циклотронной неустойчивостью, п. 1 § 14.1, а затем — кинетической неустойчивостью, п. 2 § 14.1. Все это — при достаточно малой температуре электронов.

С повышением температуры электронов (вверх по рисунку) высокочастотная неустойчивость сменяется кинетической циклотронной неустойчивостью, рассмотренной в § 14.3. Что касается соответствующих левому нижнему углу рисунка кинетически неустойчивых возмущений, обсуждавшихся в п. 2 § 14.1, то повышение электронной температуры приводит к их полной стабилизации.

Указанная картина относится к достаточно длинной плазме. В случае ограниченной по длине плазмы могут

играть роль кинетические неустойчивости, обсуждавшиеся в § 14.4. Они разместятся на рис. 14.4 в области, занимаемой гидродинамическими неустойчивостями. Если ионное распределение достаточно близко к δ -функциональному, а плотность плазмы не мала, то может проявляться «неустойчивость нулевой гармоники», см. п. 1 § 14.2 — правая часть рис. 14.4. В плазме с холодными электронами этой неустойчивости соответствуют возмущения с $k_z = 0$, а в плазме с горячими — также и с $k_z \neq 0$.

§ 14.6. Неустойчивость плазмы, состоящей из двух групп ионов

Пусть ионная компонента плазмы состоит из группы горячих частиц с $\partial f_{\perp}/\partial v_{\perp} > 0$ и группы частиц с температурой T , малой по сравнению с энергией горячих частиц. При большой плотности в такой плазме возможна раскачка высокочастотных возмущений с $\gamma > \omega_{Bi}$, исследованная в § 12.5. Теперь рассмотрим возмущения с $\omega \approx n\omega_{Bi}$, $\gamma < \omega_{Bi}$, полагая плотность плазмы не слишком большой.

Если доля горячих ионов невелика, то последние могут приводить к раскачке колебаний, обусловленных движением холодных ионов. В случае $k_z = 0$ этот эффект описывается дисперсионным уравнением

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} - \alpha \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \langle 2J_n J_n' / \xi_i \rangle}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (14.26)$$

Здесь $\alpha \equiv n_1/n_0$ — отношение плотностей горячих и холодных ионов. Из (14.26) находим, что раскачиваются ионно-циклотронные гармоники с номерами $n = 2, 3, \dots$. Их инкременты порядка

$$\gamma \simeq \alpha^{1/2} \omega_{Bi}. \quad (14.27)$$

Плотность, при которой это имеет место, такова, что

$$(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 = n^2 - 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (14.28)$$

С повышением температуры холодных ионов эта неустойчивость подавляется.

Библиографический обзор к гл. 14

1. Днестровский Ю. П. О циклотронной неустойчивости плазмы. II. Плазма с немаксвелловским распределением ионов. — «Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 259.
Показано, что немонотонность поперечного распределения ионов может приводить к ионно-циклотронной неустойчивости (§ 14.1). Рассмотрено стабилизирующее влияние нагрева электронов и конечности продольного размера плазмы.
2. Красовицкий В. Б., Степанов К. П. Возбуждение продольных колебаний в плазме с неизотропным распределением ионов по скоростям. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 1013.
3. Михайловский А. Б. Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 125.
4. Hall L. S., Heckrotte W., Kammash T. Electrostatic instabilities near cyclotron frequency in a plasma with anisotropic velocity distribution. — «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 13, p. 603.
5. Hall L. S., Heckrotte W., Kammash T. Ion cyclotron electrostatic instabilities. — «Phys. Rev.», 1965, v. A139, p. 1117.
6. Rosenbluth M. N. Microinstabilities. — In: Plasma Physics. IAEA, Vienna, 1965, p. 485.
В работах [2—6] исследуется ионно-циклотронная неустойчивость в плазме с одной группой ионов (§ 14.4—14.5); в работе [4] эта неустойчивость рассматривается также в случае плазмы с двумя группами ионов (§ 14.6).
7. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. П. Возбуждение продольных низкочастотных колебаний плазмы потоком заряженных частиц с анизотропной функцией распределения. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 441.
8. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. К теории устойчивости ионного пучка, инжектируемого в плазму поперек магнитного поля. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1961.
В работах [7, 8] рассматривается возбуждение колебаний плазмы группой ионов с немаксвелловским распределением по скоростям (§ 14.6).
9. Clarke J. F., Kelley G. G. Instabilities due to magnetic field spatial variations. — «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 1041.
10. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Циклотронная неустойчивость и сбросы плотности плазмы в адиабатических ловушках. — В сб.: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. V. II. Vienna, IAEA, 1969, p. 125.
В работах [9, 10] исследуется неустойчивость немаксвелловской плазмы в продольно-неоднородном магнитном поле («модифицированная неустойчивость отрицательной массы»).
11. Михайловская Л. В. Циклотронная неустойчивость низкоэнергетических ионов в кривом магнитном поле. — «Письма ЖЭТФ», 1967, т. 5, с. 339.
Исследуется циклотронная неустойчивость плазмы в поперечно-неоднородном магнитном поле.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ

ГЛАВА 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

§ 15.1. Предварительные замечания

Рассмотрим электромагнитные неустойчивости, которые могут развиваться в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям.

По характеру взаимодействия частиц с электромагнитным полем можно различать неустойчивости гидродинамические и кинетические. При гидродинамической неустойчивости за раскачку возмущений ответственны все частицы анизотропной компоненты плазмы, тогда как при кинетической возмущения раскачиваются только некоторой группой резонансных частиц. Гидродинамические неустойчивости возможны только при достаточно большой анизотропии. В этом случае степень анизотропии характеризуется отношением средних энергий частиц v_1^2/v_2^2 , где индекс «1» соответствует направлению, в котором частицы движутся с большими скоростями, а индекс «2» — с меньшими. Для развития кинетических неустойчивостей достаточно, вообще говоря, меньшей анизотропии, чем для гидродинамических. Анизотропия в теории кинетических неустойчивостей означает неравенство производных функции распределения по квадратам каких-либо двух компонент скорости $\partial f/\partial (v_1^2) \neq \partial f/\partial (v_2^2)$.

Электромагнитные колебания, в отличие от электростатических, — это процесс, в котором движение частиц неоднородно. Неоднородность движения связана с тем, что в такого типа колебаниях индуцируется магнитное поле, искривляющее траектории частиц. Характер неоднородного движения частиц модифицируется статическим

магнитным полем \mathbf{V}_0 , если таковое имеется в плазме. При достаточно большом статическом магнитном поле двумерное движение превращается в одномерное, вследствие чего затрудняется развитие анизотропных неустойчивостей. Поэтому анизотропная раскачка колебаний сильнее всего проявляется, если статическое поле отсутствует.

Учитывая сказанное выше, мы начнем изложение теории анизотропных неустойчивостей с анализа гидродинамических неустойчивостей сильноанизотропной плазмы в отсутствие магнитного поля. Простейшим примером плазмы с большой анизотропией является совокупность двух встречных электронных потоков. Неустойчивость такой плазмы при $\mathbf{V}_0 = 0$ рассматривается в § 15.2. С анализа этого простейшего случая плазмы удобно начать еще и потому, что вместо строгого кинетического описания плазмы можно использовать простые гидродинамические уравнения холодных электронных потоков. Стабилизирующее влияние статического магнитного поля также удобнее всего разобрать на примере двух потоков. Этому посвящен § 15.3. Кинетические анизотропные неустойчивости плазмы без статического магнитного поля обсуждаются в § 15.4. Роль статического магнитного поля в кинетических неустойчивостях исследуется в § 15.5—15.7. Вначале рассматриваются возмущения с $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_0$ — § 15.5, затем с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_0$ — § 15.6 и, наконец, косые возмущения ($k_x, k_z \neq 0$) — § 15.7. Каждому из этих трех случаев соответствуют физически различные типы неустойчивостей.

§ 15.2. Электромагнитная неустойчивость двух встречных электронных потоков

Пусть плазма состоит из двух потоков, каждый плотности n_0 , движущихся навстречу со скоростями \mathbf{V}_0 и $-\mathbf{V}_0$ вдоль оси z . Рассмотрим возмущения такой плазмы. В возмущенном состоянии каждый поток характеризуется плотностью $n^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) и скоростью $\mathbf{V}^{(\alpha)}$, удовлетворяющими уравнениям непрерывности и движения (1.2), (1.3). Ограничимся рассмотрением таких возмущений, волновой вектор которых направлен поперек направления равновесного движения потоков z , скажем, вдоль x :

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, 0), \quad (15.1)$$

предполагая при этом электрическое поле направленным вдоль z :

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z). \quad (15.2)$$

Из (1.10) находим, что возмущение магнитного поля имеет только компоненту B_y :

$$B_y = -\frac{ck_x}{\omega} E_z. \quad (15.3)$$

Как следует из (1.3), поля E_z и B_y приводят к возмущениям скорости потоков:

$$\left. \begin{aligned} V_x^{(\alpha)} &= \frac{iek_x V_0^{(\alpha)}}{m\omega^2} E_z; \\ V_z^{(\alpha)} &= \frac{ie}{m\omega} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Согласно уравнению (1.2), с наличием $V_x^{(\alpha)}$ связано возмущение плотности каждого потока $n^{(\alpha)}$:

$$n^{(\alpha)} = \frac{ien_0 k_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m\omega^2} E_z. \quad (15.5)$$

Выражения (15.4) и (15.5) подставляем в линейризованное уравнение (III) для электрического тока и находим, что отлична от нуля только z -компонента тока:

$$j_z = \frac{2ie^2 n_0}{m\omega} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) E_z. \quad (15.6)$$

Это значение тока подставляем во второе линейризованное уравнение системы (II):

$$k_x^2 E_z = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z. \quad (15.7)$$

Тогда получаем

$$\left[\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega^3} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) \right] E_z = 0, \quad (15.8)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ — квадрат ленгмюровской частоты каждого потока. Мы считаем $E_z \neq 0$, так что уравнение (15.8) может быть удовлетворено, если только

$$\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega^3} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (15.9)$$

Рассмотрим свойства возмущений, описываемых этим дисперсионным уравнением. Мы полагаем $V_0 \ll c$, поэтому,

как следует из (15.9), роль относительного движения потоков важна только при $\omega \ll \omega_p$. Для таких возмущений

$$\omega^2 = -2\omega_p^2 \frac{(V_0/c)^2}{1 + 2(\omega_p/ck_x)^2}. \quad (15.10)$$

Эта частота чисто мнимая, причем для одного из корней $\text{Im } \omega > 0$, что при принятой выше временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$ соответствует неустойчивости. Характерный масштаб волнового числа этой неустойчивости порядка

$$k_x \simeq \omega_p/c. \quad (15.11)$$

Максимальный инкремент достигается при $k_x \gtrsim \omega_p/c$:

$$\gamma_{\text{макс}} = \sqrt{2} \omega_p V_0/c. \quad (15.12)$$

Для неустойчивости исследуемого типа существенны не только возмущения электрического, но и магнитного поля. Такую неустойчивость можно назвать электромагнитной. Этим она отличается от обычной пучковой неустойчивости, связанной с раскачкой электростатических возмущений, $\mathbf{E} \approx -\nabla\psi$.

Если сравнить инкремент (15.12) с инкрементом пучковой неустойчивости (1.45), то окажется, что

$$\gamma_{\text{эм}}/\gamma_{\text{пучк}} \simeq V_0/c \ll 1. \quad (15.13)$$

Это означает, что электромагнитная неустойчивость развивается во времени более медленно, чем пучковая. Однако, как будет показано ниже, электромагнитная неустойчивость менее чувствительна к тепловому разбросу частиц по скоростям и потому может проявляться в условиях, при которых развитие пучковой неустойчивости невозможно.

§ 15.3. Два встречных потока в продольном магнитном поле

Выше предполагалось, что в плазме нет статического магнитного поля. Если оно есть и направлено вдоль движения потоков, $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$, то, как можно найти с помощью уравнения движения (1.3), возмущенное движение

частиц в отличие от (15.4) характеризуется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} V_x^{(\alpha)} &= \frac{iek_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} E_z; \\ V_y^{(\alpha)} &= \frac{\omega_B}{\omega} \cdot \frac{ek_x^2 V_0^{(\alpha)}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} E_z; \\ V_z^{(\alpha)} &= \frac{ie}{m\omega} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

Появление y -компоненты скорости потоков связано с циклотронным вращением частиц в магнитном поле \mathbf{B}_0 . С этим же связано отличие x -компоненты скорости от соответствующего выражения (1.9).

Используя (15.14), находим новые выражения для возмущений плотности и тока, после чего получаем дисперсионное уравнение, аналогичное (15.9):

$$\frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k_x^2 V_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \right) = 0. \quad (15.15)$$

Отсюда вместо (15.10) находим

$$\omega^2 = \omega_B^2 - 2\omega_p^2 \frac{(V_0/c)^2}{1 + 2(\omega_p/ck_x)^2}. \quad (15.16)$$

Видно, что магнитное поле играет стабилизирующую роль. Неустойчивость возможна, если только магнитное поле \mathbf{B}_0 достаточно мало:

$$\omega_B^2 \leq 2(\omega_p V_0/c)^2. \quad (15.17)$$

Вводя параметр $\beta_{\parallel} = 16\pi n_0 V_0^2/B_0^2$, характеризующий отношение продольного давления частиц к давлению магнитного поля, условие неустойчивости (15.17) можно записать еще так:

$$\beta_{\parallel} \geq 2. \quad (15.18)$$

Таким образом, приближение нулевого магнитного поля в задаче об электромагнитной неустойчивости означает $\beta_{\parallel} \gg 1$ (приближение плазмы большого давления).

§ 15.4. Плазма большого давления с анизотропным распределением электронов

1. Исходные соотношения. Как и в § 15.2, пренебрежем влиянием статического магнитного поля \mathbf{B}_0 на возмущенное движение частиц, полагая $\beta \gg 1$ (см. § 15.3), но учтем тепловое движение частиц. Исходим из линеаризованного кинетического уравнения для возмущенной функции распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (15.19)$$

где f_0 — функция распределения частиц в стационарном состоянии. В случае возмущений с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} из (15.19) следует:

$$f = -\frac{ie}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}}. \quad (15.20)$$

Будем считать, что функция f_0 обладает цилиндрической симметрией в пространстве скоростей:

$$f_0 = F(v_x^2 + v_y^2, v_z). \quad (15.21)$$

Такая симметрия может быть обусловлена, например, статическим магнитным полем, в котором находится плазма. Выражая в уравнении (15.20) \mathbf{B} через \mathbf{E} с помощью (1.10), приводим это уравнение к виду

$$f = -\frac{ie}{m(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})} (\mathbf{E}_\perp \mathbf{v}_\perp \Phi_1 + E_z v_z \Phi_2). \quad (15.22)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) + \frac{k_z}{\omega} \frac{\partial F}{\partial v_z}; \\ \Phi_2 &= \frac{1}{v_z} \frac{\partial F}{\partial v_z} \left(1 - \frac{k_x v_x}{\omega} \right) + \frac{k_x v_x}{\omega} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp}; \\ \varepsilon_\perp &= (v_x^2 + v_y^2)/2; \mathbf{E}_\perp = (E_x, E_y, 0); \mathbf{v}_\perp = (v_x, v_y, 0). \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Предположено также, что $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$.

С помощью (15.22) вычисляем плотность токов \mathbf{j} и связанный с \mathbf{j} тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$, учитывая связь $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$. Затем находим вклад рассматриваемой нами компоненты плазмы (в данном случае электронов) в тензор

диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$, учитывая соотношения

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}; \quad (15.24)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = 4\pi i \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} / \omega, \quad (15.25)$$

где k — индекс сорта зарядов. В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_x^2}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{xz}^{(k)} = \varepsilon_{zx}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_x v_z}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_y^2}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \Phi_1 \right\rangle; \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} &= \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_z^2}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \Phi_2 \right\rangle; \\ \varepsilon_{yx}^{(k)} = \varepsilon_{xy}^{(k)} = \varepsilon_{yz}^{(k)} = \varepsilon_{zy}^{(k)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

Здесь $\langle \dots \rangle \equiv \int (\dots) d\mathbf{v}$ — усреднение по скоростям.

Дисперсионное уравнение для нашей задачи получается при подстановке (15.24) — (15.26) в общее дисперсионное уравнение [см. (II.1.6)]

$$\left| \varepsilon_{\alpha\beta} - N^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \right| = 0; \quad N^2 \equiv (ck/\omega)^2. \quad (15.27)$$

При $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ вида (15.26) дисперсионное уравнение (15.27) распадается на два:

$$\varepsilon_{yy} - N^2 = 0; \quad (15.28)$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \theta & \varepsilon_{xz} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta & \varepsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0, \quad (15.29)$$

где θ — угол между волновым вектором и осью z , $\theta = \arctg(k_x/k_z)$. Первое из этих уравнений соответствует чисто электромагнитным возмущениям, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y} \perp \mathbf{k}$, а второе — возмущениям смешанного типа, $\mathbf{kE} \neq 0$, $[\mathbf{kE}] \neq 0$.

2. Общие замечания о свойствах анизотропной плазмы. Перейдем к обсуждению физических свойств возмущений в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям. Примером такого распределения является

ся двумаксвелловское:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T_{\perp}} \right)^{1/2} \frac{m}{2\pi T_{\parallel}} \exp \left(-\frac{mv_z^2}{2T_{\parallel}} - \frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right). \quad (15.30)$$

Уже предварительный анализ выражений для возмущенной функции распределения (15.22) или выражений для $\epsilon_{\alpha\beta}$ (15.26) приводит к мысли, что плазма с распределением типа (15.27) может быть неустойчива. Это вытекает из того, что при анизотропном распределении частиц по скоростям в указанные выражения входит отличная от нуля разность производных функций

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} - \frac{1}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = -mf_0 \left(\frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_{\parallel}} \right). \quad (15.31)$$

Из-за неравенства нулю этого выражения вещественная часть тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ может оказаться не только положительной, как в случае изотропной плазмы, но и отрицательной, что соответствует увеличению энергии колебаний вследствие взаимодействия с ними резонансных частиц. Разность (15.31) входит в (15.22) с весом $1/\omega$. Это означает, что соответствующие члены обязаны воздействовать на плазму возмущенного магнитного поля, поскольку множитель $1/\omega$ возникает при замене $\mathbf{V} = c[\mathbf{kE}]/\omega$.

Ясно, что неустойчивость может иметь место только в случае, если возмущение функции распределения, обусловленное магнитным полем, $f(\mathbf{V})$, превосходит возмущение $f(\mathbf{E})$, обязанное непосредственному воздействию возмущенного электрического поля, поскольку в противном случае $\text{Im } \epsilon_{\alpha\beta}$ имеет такой же знак, как и в изотропной плазме. В частном случае возмущений с $k_z = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$, для которых

$$f = -\frac{ieE_z v_z}{m(\omega - k_x v_x)} \left[\frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} - \frac{k_x v_x}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right], \quad (15.32)$$

это означает, что неустойчивость возможна только при

$$\frac{1}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} > 0. \quad (15.33)$$

Видно, что это условие может удовлетворяться, например, в случае плазмы, состоящей из двух холодных потоков, обсуждавшейся в § 15.2. Действительно, рассматривая

соответствующую такой плазме функцию распределения

$$f_0 = \delta(\epsilon_{\perp}) [\delta(v_z - V_0) + \delta(v_z + V_0)] \quad (15.34)$$

как предел выражения

$$f_0 \sim \frac{1}{T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2}} \exp \left(-\frac{\epsilon_{\perp}}{T_{\perp}} \right) \left\{ \exp \left[-\frac{m(v_z - V_0)^2}{2T_{\parallel}} \right] + \exp \left[-\frac{m(v_z + V_0)^2}{2T_{\parallel}} \right] \right\}, \quad (15.35)$$

можно найти, что условие (15.33) выполняется, если $|v_z| < V_0$.

При двумаксвелловском распределении типа (15.30) из (15.33) следует, что возмущения с $k_z = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$ могут быть неустойчивы только при

$$T_{\parallel} > T_{\perp}. \quad (15.36)$$

В другом предельном случае непотенциальных возмущений $k_x = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$ возмущенная функция распределения равна

$$f = -\frac{ieE_y v_y}{m(\omega - k_z v_z)} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} - \frac{k_z v_z}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} - \frac{\partial f_0}{\partial (v_z^2/2)} \right) \right]. \quad (15.37)$$

Поэтому необходимое условие неустойчивости плазмы относительно таких возмущений имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_{\perp}} - \frac{1}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} > 0. \quad (15.38)$$

Для двумаксвелловского распределения это означает

$$T_{\perp} > T_{\parallel}. \quad (15.39)$$

3. Дисперсионные уравнения при двумаксвелловском распределении по скоростям. Условия (15.36) и (15.39) физически эквивалентны. Они означают, что неустойчивости соответствуют возмущения с вектором \mathbf{k} , ориентированным перпендикулярно к направлению наибольшей из средних компонент скорости равновесного движения.

Отмеченные выше два предельных случая возмущений с $k_z = 0$ и $k_x = 0$ в плазме с двумаксвелловским распределением по скоростям описываются дисперсионными уравнениями, отличающимися одно от другого только переобозначением продольных и поперечных индексов. Эти

уравнения имеют вид:

а) $k_z = 0$, $k = k_x$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$,

$$N^2 - \varepsilon_{zz} \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k| v_{T\perp}} \cdot \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T\perp}} \right) \right] = 0; \quad (15.40)$$

б) $k_x = 0$, $k = k_z$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$,

$$N^2 - \varepsilon_{yy} \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k| v_{T\parallel}} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T\parallel}} \right) \right] = 0. \quad (15.41)$$

Здесь $v_{T\perp} = (2T_{\perp}/m)^{1/2}$; $v_{T\parallel} = (2T_{\parallel}/m)^{1/2}$; $W(x) = \exp(-x^2) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(t^2) dt \right)$ — функция, введенная в § 2.4.

Перейдем к конкретному исследованию этих уравнений. Вследствие их эквивалентности достаточно исследовать какое-либо одно из этих двух уравнений. Мы поступим так: будем исследовать симметризованное уравнение

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - i \sqrt{\pi} \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \cdot \frac{\omega}{|k| v_{T\min}} W \left(\frac{\omega}{|k| v_{T\min}} \right) \right] = 0. \quad (15.42)$$

где

$$T_{\max} = \max(T_{\parallel}, T_{\perp}); \quad T_{\min} = \min(T_{\parallel}, T_{\perp}). \quad (15.43)$$

При $T_{\parallel} > T_{\perp}$ это уравнение соответствует (15.40), а при $T_{\perp} > T_{\parallel}$ — (15.41).

4. Неустойчивость гидродинамического типа. Пусть анизотропия температур достаточно велика, $T_{\min}/T_{\max} \rightarrow 0$. Тогда для случая возмущений с фазовой скоростью $v_{T\min} \ll \omega/k \ll c$ из (15.42) следует

$$\omega^2 = - \frac{k^2 T_{\max}}{m [1 + (ck/\omega_p)^2]}. \quad (15.44)$$

Этот результат находится в соответствии с (15.40) и свидетельствует о наличии электромагнитной неустойчивости гидродинамического типа в плазме с большой анизотропией температур. Инкремент нарастания возмущений по порядку величины равен [ср. с (15.12)]

$$\gamma \simeq \frac{v_{T\max}}{c} \omega_p. \quad (15.45)$$

Решение (15.44) удовлетворяет принятому выше предположению $\omega/k \gg v_{T\min}$, если

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \gg 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2}. \quad (15.46)$$

Видно, что степень анизотропии, необходимая для развития неустойчивости гидродинамического типа, минимальна при

$$k \lesssim \omega_p/c. \quad (15.47)$$

5. Кинетическая неустойчивость. Неустойчивость гидродинамического типа отсутствует, если степень анизотропии плазмы не слишком велика — меньше, чем по условию (15.46). В этом случае возможна кинетическая неустойчивость, $|\omega| \lesssim kv_{T\min}$. Границу этой неустойчивости, соответствующую возмущениям с $\text{Im } \omega = 0$, находим, полагая в (15.42) $\omega \ll kv_{T\min}$:

$$(T_{\max}/T_{\min})_{\text{гран}} = 1 + c^2 k^2 / \omega_p^2. \quad (15.48)$$

На границе устойчивости, как следует из (15.42), обращаются в нуль как $\text{Im } \omega$, так и $\text{Re } \omega$. При T_{\max}/T_{\min} , несколько превышающем граничное значение (15.48), имеем

$$\gamma = \frac{|k| v_{T\min}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \left(1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} \right) \right]. \quad (15.49)$$

Видно, что плазма может быть неустойчивой при сколь угодно малом отношении $\Delta T/T_{\max}$, где $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$. Однако при $\Delta T \ll T_{\max}$ длина волны нарастающих возмущений должна быть весьма велика:

$$k \simeq \frac{\omega_p}{c} \left(\frac{\Delta T}{T_{\max}} \right)^{1/2}. \quad (15.50)$$

§ 15.5. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_z=0$ в плазме с $T_{\perp} > T_{\parallel}$

В § 15.2 в приближении двух потоков была показана неустойчивость плазмы с $\beta_{\parallel} \rightarrow \infty$, $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel} = 0$ относительно возмущений с $k_z = 0$. В § 15.3 также в двухпоточковом приближении было отмечено стабилизирующее влияние статического магнитного поля на такие возмущения при конечных β_{\parallel} и $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel} = 0$. Двухпоточковое приближение было обобщено в § 15.4 на случай плазмы с $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ для конечных T_{\perp}/T_{\parallel} и $(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) \rightarrow \infty$ (приближение нулевого магнитного поля). Из рассмотрения, проведенного в п. 5 § 15.4, следует, что неустойчивость с $k_z = 0$ имеет место не только при $T_{\perp}/T_{\parallel} \rightarrow 0$, но и при всех $T_{\perp}/T_{\parallel} < 1$. Рассмотрим теперь влияние на эту неустойчивость магнитного поля в случае конечных T_{\perp}/T_{\parallel} .

При $k_z = 0$ дисперсионное уравнение для возмущений с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ имеет вид (II.15.22) (см. Приложение к гл. 15). В случае двумаквелловского распределения (15.30) и $k_z = 0$ входящая в (II.15.22) компонента тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{33} равна [см. (II.15.24)]

$$\epsilon_{33} = -\frac{\omega_p^2}{\omega} \left[\frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n(z_{\perp}) \exp(-z_{\perp})}{\omega - n\omega_B} \right], \quad (15.51)$$

где $z_{\perp} = k_{\perp}^2 T_{\perp} / m\omega_B^2$. С помощью (15.51) и (15.52) получаем дисперсионное уравнение для интересующей нас задачи:

$$1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (1 - I_0 \exp(-z_{\perp})) + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \sum_{n \neq 0} \frac{\omega I_n \exp(-z_{\perp})}{\omega - n\omega_B} = 0. \quad (15.52)$$

Чтобы сделать здесь предельный переход к $T_{\perp} \rightarrow 0$, нужно разложить в ряд функции Бесселя. Тогда полу-

чается уравнение

$$\left(\frac{ck_{\perp}}{\omega_p} \right)^2 + 1 + \frac{k_{\perp}^2 T_{\parallel}}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} = 0, \quad (15.53)$$

качественно совпадающее с (15.15).

Предельный переход к приближению нулевого магнитного поля при конечных T_{\perp} можно сделать, воспользовавшись тождеством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_n \exp(-z_{\perp})}{\omega - n\omega_B} = -\frac{i}{\omega_B} \int_0^{\infty} \exp\{z_{\perp} \cos \varphi + i(\omega/\omega_B)\varphi\} d\varphi. \quad (15.54)$$

Разлагая показатель экспоненты в правой части (15.54) в ряд по φ , можно провести интегрирование по φ и привести таким путем (15.52) к (15.40).

Рассмотрим теперь уравнение (15.52) при конечных ω_B/ω и T_{\perp}/T_{\parallel} . Замечаем, что оно имеет решение $\omega = 0$, если

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right)_{\text{гран}} = \frac{1 - I_0 \exp(-z_{\perp})}{1 + (ck_{\perp}/\omega_p)^2}. \quad (15.55)$$

При T_{\perp}/T_{\parallel} , близких к этому граничному значению, частота колебаний определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \cdot \frac{\omega_B^2}{\sum_{n \neq 0} (I_n/n^2) \exp(-z_{\perp})} \times \left[\left(\frac{ck_{\perp}}{\omega_p} \right)^2 + 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (1 - I_0 \exp(-z_{\perp})) \right]. \quad (15.56)$$

Видно, что плазма неустойчива, $\omega^2 < 0$, если

$$T_{\perp}/T_{\parallel} < (T_{\perp}/T_{\parallel})_{\text{гран}}. \quad (15.57)$$

В соответствии с (15.55) критическое значение T_{\perp}/T_{\parallel} при всех $(ck_{\perp}/\omega_p)^2$ и z_{\perp} не превосходит единицы. Ближе всего к единице это отношение может быть при $z_{\perp} > 1$, $(ck_{\perp}/\omega_p)^2 < 1$, что возможно только при $(\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}) > 1$. Если же $\beta_{\perp} < 1$ и $z_{\perp} > 1$, то

$$(T_{\perp}/T_{\parallel})_{\text{гран}} = \beta_{\perp}/2. \quad (15.58)$$

так что условие неустойчивости в точности совпадает с (15.18).

Таким образом, с уменьшением параметра β при заданном T_{\perp}/T_{\parallel} неустойчивость подавляется.

§ 15.6. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_{\perp} = 0$ в плазме с $T_{\perp} > T_{\parallel}$

Из анализа, проведенного в § 15.4, следует, что в приближении нулевого магнитного поля плазма с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ неустойчива относительно возмущений с $k_{\perp} = 0$. Рассмотрим эту неустойчивость при увеличении магнитного поля, т. е. при уменьшении параметра β .

Как показано в Приложении к данной главе, общее дисперсионное уравнение плазмы в магнитном поле при $k_{\perp} = 0$ распадается на три [см. (П.15.26) и (П.15.27)]. Эффекты анизотропии содержатся в двух из этих уравнений, соответствующих чисто электромагнитным возмущениям, $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$. При двумаквелловском распределении электронов [см. уравнение (15.30)] явный вид этих уравнений таков [используется (П. 15.28)]:

$$1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel}} \left[(\omega \mp \omega_B) \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) - \omega \right] W \left(\frac{\omega \mp \omega_B}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) = 0. \quad (15.59)$$

1. Неустойчивость гидродинамического типа. При $|\omega \mp \omega_B| \gg k_z v_{T\parallel}$ и $\omega \ll k_z c$ из (15.59) следует:

$$\left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 + \frac{\omega}{\omega \mp \omega_B} \left[1 + \frac{(T_{\perp} - T_{\parallel}) k_z^2}{m \omega (\omega \mp \omega_B)} \right] = 0. \quad (15.60)$$

При $\omega \gg \omega_B$, $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$, $\omega \ll k_z c$ это уравнение совпадает с (15.44) и описывает неустойчивость гидродинамического типа в плазме с $\beta_{\perp} \gg 1$ и $\beta_{\parallel} \ll \beta_{\perp}$. Слагаемое с разностью температур в (15.60) не мало по сравнению с остальными членами только при $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$. При этом корни (15.60) удовлетворяют условию

$$(\omega \mp \omega_B)^2 \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 + \omega (\omega \mp \omega_B) + \frac{k_z^2 T_{\perp}}{m} = 0. \quad (15.61)$$

Отсюда следует, что имеет место неустойчивость, если

$$2\beta_{\perp} (ck_z/\omega_p)^2 [1 + (ck_z/\omega_p)^2] > 1. \quad (15.62)$$

Видно, что при фиксированном значении параметра $(ck_z/\omega_p)^2$ плазма неустойчива, если ее поперечное давление не слишком мало. Критическое значение β_{\perp} выше которого плазма гидродинамически неустойчива, зависит от волнового числа. Величина $\beta_{\perp \text{ крит}}$ тем меньше, чем больше $(k_z c/\omega_p)^2$. Однако при большом $(k_z c/\omega_p)^2$ частота ω оказывается весьма близкой к ω_B , вследствие чего условие $|\omega \mp \omega_B| \gg k_z v_{T\parallel}$ перестает выполняться, если только T_{\parallel}/T_{\perp} не чрезмерно мало.

С помощью (15.61) можно найти, что интервал частот нарастающих возмущений ограничен снизу циклотронной частотой, $\omega \gtrsim \omega_B$. Инкремент возмущений в плазме с $\beta_{\perp} \simeq 1$ и $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$ порядка циклотронной частоты:

$$\gamma \simeq \omega_B. \quad (15.63)$$

2. Кинетическая неустойчивость. Граница устойчивости плазмы относительно возмущений, удовлетворяющих уравнению (15.59), при $\omega \ll k_z c$ определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left(\frac{k_z c}{\omega_p}\right)^2 &= 0; \\ (\omega \mp \omega_B) \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) - \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.64)$$

Эти соотношения получаются, если в (15.59) считать ω вещественным и приравнять нулю вещественные и мнимые члены.

Из второго уравнения (15.64) находим, что в отличие от случая п. 5 § 15.4 вещественная часть частоты на границе неустойчивости не равна нулю:

$$\omega = \pm (1 - T_{\parallel}/T_{\perp}) \omega_B. \quad (15.65)$$

Первое уравнение (15.64) дает граничное значение T_{\parallel}/T_{\perp} , ниже которого возможна неустойчивость. Этот результат совпадает с (15.48), полученным в приближении нулевого магнитного поля. Видно, что наличие магнитного

поля не влияет на границу неустойчивости плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Это качественно отличается от того, что имеет место для плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ (см. § 15.5): граница устойчивости такой плазмы чувствительна к наличию магнитного поля, как это следует из (15.55) и (15.57).

Магнитное поле, однако, существенно влияет на условия резонанса частиц с волной, вследствие чего инкремент нарастания возмущений оказывается весьма чувствительным к величине параметра β . В частности, при $\beta_{\parallel} \ll 1$ и $\alpha \equiv (ck_z/\omega_p)^2 \simeq 1$ частота и инкремент колебаний, описываемых уравнением (15.59), таковы:

$$\operatorname{Re} \omega = \pm \frac{\alpha}{1 \pm \alpha} \omega_B; \quad (15.66)$$

$$\gamma \equiv \operatorname{Im} \omega = \frac{\sqrt{\pi} \omega_B \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 - \alpha \right)}{(1 \pm \alpha)^3 \beta_{\parallel}^{1/2} \alpha^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{\alpha \beta_{\parallel} (1 \pm \alpha)^2} \right]. \quad (15.67)$$

Видно, что если только анизотропия температур не слишком велика, то инкремент экспоненциально мал.

Заметим, что при $\alpha \ll 1$ колебания типа (15.66) называются свистящими атмосфериками (а также свистами, вистлерами и геликонами). Неустойчивость анизотропной плазмы с малым β , описываемая соотношениями (15.66), (15.67), а также более общим уравнением (15.59), иногда называется неустойчивостью вистлер-моды.

§ 15.7. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ на косых волнах

Рассмотрим возмущения с k_z и k_{\perp} , отличными от нуля. Считаем их низкочастотными, $(\omega, k_z v_{T\parallel}) \ll \omega_B$, и длинноволновыми, $k_{\perp} \rho \ll 1$. Кроме того, примем $\omega \ll k_z v_{T\parallel}$. При этих предположениях из (П.15.20) следует, что компонента ϵ_{33} велика по сравнению с остальными компонентами тензора диэлектрической проницаемости как $(\omega_p/ck)^2$ либо как $(k\rho)^{-2}$. В нулевом приближении по $1/\epsilon_{33}$ общее дисперсионное уравнение (15.27) для возмуще-

ний с $E_z = 0$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -N^2 \cos^2 \theta + \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & -N^2 + \epsilon_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (15.68)$$

С учетом (П.15.20) это означает

$$\omega^2 - \left(\frac{kc}{\omega_p} \right)^4 \omega_B^2 \cos^2 \theta \left\{ 1 \pm \beta_{\perp} \left(\frac{k_{\perp}}{k} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \left(1 \pm i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) \right] \right\} = 0. \quad (15.69)$$

При $T_{\perp} = T_{\parallel}$ это уравнение описывает колебания ветви свистящих атмосфериков. Частота этих колебаний приближенно равна [ср. с (15.66)]

$$\omega = \pm (kc/\omega_p)^2 \omega_B \cos \theta. \quad (15.70)$$

При $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ уравнение (15.69) удовлетворяется при $\omega = 0$, если

$$T_{\perp}/T_{\parallel} = (T_{\perp}/T_{\parallel})_{\text{гран}} \equiv 1 + k^2/\beta_{\perp} k_{\perp}^2. \quad (15.71)$$

Вблизи этого значения T_{\perp}/T_{\parallel} частота возмущений чисто мнимая, причем

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{|k_z| v_{T\parallel}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \left(1 \pm \frac{k^2}{\beta_{\perp} k_{\perp}^2} \right) \right]. \quad (15.72)$$

Видно, что неустойчивость развивается при не слишком малом значении параметра β_{\perp} :

$$\beta_{\perp} \geq T_{\parallel}/(T_{\perp} - T_{\parallel}). \quad (15.73)$$

Критерий неустойчивости (15.73) можно записать еще и так:

$$T_{\perp}/T_{\parallel} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}}. \quad (15.74)$$

Такого же типа критерий неустойчивости получается и для неустойчивости, вызываемой ионной анизотропией (см. § 18.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

1. Решение кинетического уравнения для однородной релятивистской плазмы в магнитном поле

Кинетическое уравнение Больцмана для возмущенной функции распределения f электронов или ионов, находящихся в магнитном поле, имеет хорошо известный вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla f + \frac{e}{c} [v \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -e \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{П.15.1})$$

Это уравнение получается при линеаризации полного уравнения Больцмана в пренебрежении столкновениями между частицами. В (П.15.1) \mathbf{v} , \mathbf{p} — скорость и импульс частиц, связанные соотношением

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad (\text{П.15.2})$$

где e , m_0 — заряд и масса покоя частиц; c — скорость света; \mathbf{E} , \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля возмущения, связанные соотношением

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}; \quad (\text{П.15.3})$$

\mathbf{B}_0 — равновесное магнитное поле, которое предполагается направленным вдоль оси z , $\mathbf{B}_0 \parallel z$; f_0 — равновесная функция распределения соответствующего сорта зарядов, удовлетворяющая кинетическому уравнению нулевого приближения:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \partial f_0 / \partial \mathbf{p} = 0. \quad (\text{П.15.4})$$

Общее решение (П.15.4) можно представить в виде

$$f_0(\mathbf{p}) = F(p_\perp, p_z), \quad (\text{П.15.5})$$

где $p_\perp = |\mathbf{p}_\perp|$; p_\perp , p_z — поперечные и продольная по отношению к \mathbf{B}_0 компоненты импульса частицы; F — функция произвольного вида.

Решение (П.15.1) можно записать в виде интеграла вдоль характеристик соответствующего однородного уравнения, означающих траектории невозмущенного движения частиц:

$$f = -e \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} dt'. \quad (\text{П.15.6})$$

Стоящие под интегралом функции импульсов и координат берутся при $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t', \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t', \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, где функции $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ удов-

летворяют уравнениям движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]/c, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (\text{П.15.7})$$

а \mathbf{r}_0 , \mathbf{p}_0 — координата и импульс, которыми в момент времени t_0 характеризуется частица, находящаяся в момент времени в точке t и обладающая при этом импульсом \mathbf{p} . При получении (П.15.6) предполагалось, что при $t = -\infty$ плазма и поле находятся в невозмущенном состоянии, а затем появляется очень малое возмущение, которое медленно нарастает по времени. Ниже будем считать, что пространственно-временное поведение возмущения характеризуется зависимостью вида $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, где ω имеет бесконечно малую положительную мнимую часть.

Используя (П.15.2), (П.15.3), (П.15.5), а также удобное преобразование

$$\mathbf{v}_\perp \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{k_\perp^2} \{ (\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp) (\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp) - [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp]_z [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_\perp]_z \}, \quad (\text{П.15.8})$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, а индекс « \perp » у векторов означает их часть, перпендикулярную \mathbf{B}_0 , приводим (П.15.6) к виду

$$f = -e \left\{ \frac{1}{k_\perp^2} \Phi_\perp [(\mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp) G_1 + [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp]_z G_2] + E_z \left[\frac{\partial F}{\partial p_R} G_0 - \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \right) G_1 \right] \right\}. \quad (\text{П.15.9})$$

Здесь

$$\Phi_\perp = \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial p_\perp} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial F}{\partial p_\perp} \right); \quad (\text{П.15.10})$$

$$G_0 = \int_0^{+\infty} \exp \left[i\omega\tau - ik \int_{t-\tau}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, \tau') d\tau' \right] d\tau, \quad (\text{П.15.11})$$

а функции G_1 , G_2 отличаются от G_0 тем, что в подынтегральном выражении перед экспонентой стоят соответственно множители $\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp(t-\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, $[\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_\perp(t-\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)]_z$.

Интегралы G_α ($\alpha = 0, 1, 2$) вычисляются аналогично § 5.2. Окончательные выражения для G_α имеют вид:

$$(G_0, G_1, G_2) = i \exp[i\zeta \sin(\alpha - \Psi)] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n (J_n, n\omega_B J_n, ik_\perp v_\perp J_n') \exp[-in(\alpha - \Psi)]. \quad (\text{П.15.12})$$

Здесь $\zeta_n = (\omega - k_z v_z - n\omega_B)^{-1}$, $\alpha = \text{arctg}(v_y/v_x)$, $\omega_B = (eB_0/m_0c) \times (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Подставляя (П.15.12) в (П.15.9), получаем искомое

выражение для возмущения функции распределения:

$$f = -ie \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \left\{ \frac{\Phi_{\perp}}{k_{\perp}^2} [n\omega_B J_n(k_{\perp} E_{\perp}) + ik_{\perp} v_{\perp} J'_n(k_{\perp}, E_{\perp})] + \Phi_{\parallel} J_n E_z \right\} \exp [i\xi \sin(\alpha - \Psi) - in(\alpha - \Psi)], \quad (\text{П.15.13})$$

где

$$\Phi_{\parallel} = \frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{n\omega_B}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right). \quad (\text{П.15.14})$$

2. Общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости

Интегрируя по импульсам уравнение (П.15.13) с весом $e\mathbf{v}$, вычисляем плотность токов. Интегрирование по углу α производится с помощью соотношений

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (\cos \alpha, \sin \alpha, 1) \exp (i\xi \sin \alpha - in\alpha) = \left(\frac{nJ_n}{\xi}, -iJ'_n, J_n \right). \quad (\text{П.15.15})$$

Тогда получается

$$(j_1, j_2, j_3) = -ie^2 \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \left[v_{\perp} \Phi_{\perp} \left(\frac{nJ_n}{\xi} E_1 + iJ'_n E_2 \right) + \Phi_{\parallel} J_n E_3 \right] \left(\frac{nv_{\perp} J_n}{\xi}, -iv_{\perp} J'_n, v_z J_n \right). \quad (\text{П.15.16})$$

Здесь индекс «1» означает проекцию вектора на направление \mathbf{k}_{\perp} ; «2» — на направление, перпендикулярное \mathbf{k}_{\perp} и \mathbf{B}_0 ; «3» — на направление \mathbf{B}_0 . Функция F , входящая в Φ_{\perp} , Φ_{\parallel} предположена нормированной так, что

$$\int F p_{\perp} dp_{\perp} dp_z = n_0, \quad (\text{П.15.17})$$

где n_0 — равновесная плотность частиц. Далее, используя соотношения

$$j_{\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} E_{\beta}, \quad (\text{П.15.18})$$

($\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ — тензор проводимости k -й компоненты плазмы) и

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (\text{П.15.19})$$

находим вклад в диэлектрическую проницаемость соответствующей компоненты плазмы:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{4\pi e^2}{\omega} \times \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \Phi_{\perp} \left[\begin{array}{ccc} v_{\perp}^2 \frac{n^2}{\xi^2} J_n^2, & iv_{\perp}^2 \frac{nJ_n J'_n}{\xi}, & v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2}{\xi} \\ -iv_{\perp}^2 \frac{nJ_n J'_n}{\xi}, & J_n'^2, & -iv_{\perp} v_z J_n J'_n \\ v_{\perp} v_z \frac{nJ_n^2}{\xi}, & iv_{\perp} v_z J_n J'_n, & v_z J_n^2 \frac{\Phi_{\parallel}}{\omega} \end{array} \right] \right\rangle \quad (\text{П.15.20})$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает $\int (\dots) p_{\perp} dp_{\perp} dp_z$.

При получении (П.15.20) были использованы соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n n J_n^2 \Phi_{\parallel} = v_z \Phi_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n n J_n^2; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J'_n \Phi_{\parallel} = v_z \Phi_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J'_n. \end{array} \right\} \quad (\text{П.15.21})$$

Полный тензор диэлектрической проницаемости получается при подстановке (15.20) в (15.24), а общее дисперсионное уравнение имеет вид (15.27).

Отметим некоторые частные случаи общего дисперсионного уравнения.

3. Возмущения с $k_z = 0$

Общее дисперсионное уравнение (15.27) при $k_z = 0$ распадается на два:

$$\varepsilon_{33} - N^2 = 0; \quad (\text{П.15.22})$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{41} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П.15.23})$$

Входящие сюда компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$\varepsilon_{33} = 1 + \sum_{e, i} \frac{4\pi e^2}{\omega} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_z J_n^2}{\omega - n\omega_B} \times \left[\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{n\omega_B}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right) \right] \right\rangle; \quad (\text{П.15.24})$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{c, i} \frac{4\pi e^2}{\omega} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_{\perp} \partial F / \partial p_{\perp}}{\omega - n\omega_B} \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\xi^2} J_n^2 & \frac{inJ_n J'_n}{\xi} \\ -i \frac{nJ_n J'_n}{\xi} & J_n'^2 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad (\alpha, \beta) = (1, 2). \quad (\text{П.15.25})$$

4. Возмущение с $k_{\perp} = 0$

При $k_{\perp} = 0$ общее дисперсионное уравнение распадается на три:

$$\varepsilon_{11} \mp i\varepsilon_{12} - N^2 = 0; \quad (\text{П.15.26})$$

$$\varepsilon_{33} = 0. \quad (\text{П.15.27})$$

Первые два уравнения описывают электромагнитные волны, а третье — электростатические. нас интересуют только уравнения (П.15.26). Входящие в них комбинации $\varepsilon_{11} \mp i\varepsilon_{12}$ равны:

$$\varepsilon_{11} \mp i\varepsilon_{12} = 1 + \sum_{c, i} \frac{4\pi e^2}{\omega} \times \\ \times \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega \mp \omega_B - k_z v_z} \left(\frac{\partial F}{\partial p_z} - \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \right) \right\rangle. \quad (\text{П.15.28})$$

Библиографический обзор к гл. 15

1. Weibel E. S. Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution.—«Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 83.
2. Fried B. D. Mechanism for instability of transverse plasma wave.—«Phys. Fluids», 1959, v. 2, p. 337.
3. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 181.
Работы [1—3] — первые в большом цикле исследований по электромагнитным неустойчивостям плазмы с анизотропным распределением электронов по скоростям. В [1, 2] рассмотрена неустойчивость встречных электронных потоков (§ 15.3), в работе [3] — кинетическая неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков в плазме с $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ (п. 2 § 15.6).
4. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.

В § 1 работы [4] получены некоторые результаты, изложенные в § 15.4—15.7.

5. Hamasaki S. Stability of electromagnetic waves propagating perpendicular to a uniform magnetic induction.—«Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 1173.
6. Hamasaki S. Electromagnetic microinstabilities of plasmas in a uniform magnetic induction.—«Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 2724.
7. Landau R. W., Cuperman S. A temperature — anisotropy instability for electromagnetic wave propagating across a static magnetic field.—«J. Plasma Phys.», 1970, v. 4, p. 13.
В работах [5—7] исследуется влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$, развивающуюся при $k_z = 0$, § 15.5.
8. Sudan R. N. Plasma electromagnetic instabilities.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 57.
9. Sudan R. N. Electromagnetic instabilities in the nonthermal relativistic plasma.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 153, p. 1208.
В работах [8, 9] рассматриваются неустойчивости с $k_{\perp} = 0$ при $B_0 \neq 0$ (§ 15.6).
10. Scharer J. E. Plasma electromagnetic instabilities in a magnetic mirror configuration.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 652.
Исследуется неустойчивость свистящих атмосфериков в плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке.
11. Stepanov K. N., Yegorenkov V. D. Electromagnetic instabilities of finite pressure anisotropic plasma with hot electrons.—«Plasma Phys.», 1973, v. 15, p. 627.
12. Егоренков В. Д., Степанов К. П. Об устойчивости плазмы конечного давления с анизотропным распределением электронов по скоростям.—«Укр. физ. журн.», 1970, т. 15, с. 325.
В работах [11, 12] исследуются аperiodические неустойчивости в анизотропной плазме с учетом конуса потерь.

ГЛАВА 16

РАСКАЧКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ ГРУППОЙ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО СКОРОСТЯМ

§ 16.1. Постановка задачи

Предположим, что электронная компонента плазмы состоит из двух групп электронов: медленных, иначе называемых холодными, и быстрых — горячих. Медленные электроны имеют плотность n_0 , а быстрые $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$. Распределение по скоростям быстрых электронов считаем анизотропным, так что для них

$\partial f/\partial(v_{\perp}^2) \neq \partial f/\partial(v_{\parallel}^2)$. Вследствие анизотропии скоростного распределения быстрых электронов их взаимодействие с собственными колебаниями холодных электронов может приводить к неустойчивости. Мы исследуем возможность развития такой неустойчивости, предполагая, что в плазме имеется слабое магнитное поле, такое, что $\omega_p > \omega_B$, где ω_p — ленгмюровская частота холодных электронов.

В холодной плазме с $\omega_p > \omega_B$ имеется несколько ветвей колебаний, которые могут эффективно взаимодействовать с быстрыми электронами. Ниже ограничимся рассмотрением только таких колебаний, в которых существенно возмущается магнитное поле, — электромагнитных. (Теория анизотропных электростатических неустойчивостей изложена в гл. 8, 9). Анализ электромагнитных колебаний в пренебрежении эффектами быстрых электронов проводится в § 16.2. Раскачка колебаний с $k_{\perp} = 0$ обсуждается в § 16.3, а раскачка колебаний с $k_{\perp} \neq 0$ — в § 16.4. Случай пучковых систем с анизотропным распределением частиц по скоростям рассматривается в § 16.5.

§ 16.2. Электромагнитные колебания в плазме с холодными электронами

1. Диэлектрическая проницаемость. Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы можно получить, используя гидродинамическое описание плазмы, аналогично тому, как мы поступали в § 15.2, 15.3. Начнем с того, что линеаризуем уравнение (1.3):

$$-i\omega \mathbf{V}' = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{V}', \boldsymbol{\omega}_B]; \quad \boldsymbol{\omega}_B \equiv e\mathbf{B}_0/mc. \quad (16.1)$$

Отсюда находим возмущение скорости электронов:

$$\left. \begin{aligned} V'_1 &= \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} (i\omega \mathbf{E} - |\mathbf{E}_{\perp}, \boldsymbol{\omega}_B|); \\ V'_z &= ieE_z/m\omega. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

По формулам $\mathbf{j} = en_0 \mathbf{V}'$ и $j_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ вычисляем плотность тока и тензор проводимости, а по формуле (15.25) — вклад в тензор диэлектрической проницаемости, обязанный

холодным электронам (индекс сверху «нуль»):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11}^{(0)} &= \epsilon_{22}^{(0)} = -\omega_p^2/(\omega^2 - \omega_B^2); \\ \epsilon_{12}^{(0)} &= -\epsilon_{21}^{(0)} = -i\omega_p^2\omega_B/\omega(\omega^2 - \omega_B^2); \\ \epsilon_{33}^{(0)} &= -\omega_p^2/\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Остальные компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ равны нулю.

2. Общее дисперсионное уравнение холодной плазмы. Подставляем (16.3) в (15.27). Результат удобно представить в виде

$$N^4 \epsilon_0 - N^2 \epsilon_{33} (\epsilon_+ + \epsilon_-) \cos 2\theta + \epsilon_+ \epsilon_- (\epsilon_{33} - N^2 \sin^2 \theta) = 0, \quad (16.4)$$

где $\epsilon_0 \equiv \epsilon_{11} \sin^2 \theta + \epsilon_{33} \cos^2 \theta$ — скалярная диэлектрическая проницаемость, а $\epsilon_{\pm} \equiv \epsilon_{11} \mp i\epsilon_{12}$ означает

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}. \quad (16.5)$$

3. Электромагнитные волны при $k_{\perp} = 0$. Уравнение (16.4) при $k_{\perp} = 0$ ($\theta = 0$) распадается на три. Одно соответствует электростатическим возмущениям, а два других

$$N^2 - \epsilon_{\pm} = 0 \quad (16.6)$$

электромагнитным волнам с $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

В плотной плазме, $\omega_p^2 > \omega_B^2$, уравнения (16.6) имеют решение с

$$\omega = \pm \frac{\omega_B}{1 + (\omega_p/c k)^2}. \quad (16.7)$$

Это — ветвь свистящих атмосфериков. Остальные корни (16.6) при $\omega_p^2 > \omega_B^2$ приближенно равны

$$\omega = \pm (\omega_p^2 + c^2 k^2)^{1/2}. \quad (16.8)$$

4. Свистящие атмосферики при $k_{\perp} \neq 0$. При $\omega_p^2 \gg \omega_B^2$ общее уравнение (16.4) для возмущений с $k \ll \omega_p/c$ и $\omega \lesssim \omega_B$ сводится к следующему:

$$N^4 \cos^2 \theta + \epsilon_+ \epsilon_- = 0. \quad (16.9)$$

Это уравнение имеет решение

$$\omega = \pm \frac{\omega_B \cos \theta}{\omega_p^2} c^2 k^2, \quad (16.10)$$

соответствующее свистящим атмосферикам, распространяющимся под углом к магнитному полю.

§ 16.3. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$

Рассмотрим взаимодействие колебаний типа (16.7) с быстрыми частицами малой плотности. Дисперсионное уравнение для этой задачи аналогично (16.6), но теперь

$$\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\pm}^{(0)} + \epsilon_{\pm}^{(1)}, \quad (16.11)$$

где $\epsilon_{\pm}^{(0)}$ соответствует вкладу холодной плазмы:

$$\epsilon_{\pm}^{(0)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}, \quad (16.12)$$

а $\epsilon_{\pm}^{(1)}$ — быстрым частицам. Величина $\epsilon_{\pm}^{(1)}$ связана с ϵ_{12} , ϵ_{11} таким же соотношением, как и в случае холодной плазмы:

$$\epsilon_{\pm}^{(1)} = \epsilon_{11}^{(1)} \mp i\epsilon_{12}^{(1)}. \quad (16.13)$$

Используя (П.15.28), находим

$$\epsilon_{\pm}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega \mp \omega_B - k_z v_z} \times \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right] \right\rangle. \quad (16.14)$$

Из (16.6), (16.11), (16.12), (16.14) следует выражение для инкремента колебаний частоты (16.7):

$$\gamma = \frac{\pi}{|k_z|} \cdot \frac{q}{(1+q)^3} \cdot \frac{\omega_B^3}{(ck)^2} \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \times \int \frac{v_{\perp}^3}{2} dv_{\perp} \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right]_{v_z=v_{\text{рез}}}, \quad (16.15)$$

где $v_{\text{рез}} \equiv (\omega \mp \omega_B)/k_z$ — скорость резонансных частиц, $q \equiv (\omega_p/ck_z)^2$. Согласно (16.7),

$$v_{\text{рез}} = \mp \frac{\omega_B}{k_z [1 - (ck_z/\omega_p)^2]}. \quad (16.16)$$

При $k_z \approx \omega_p/c$ скорость резонансных частиц порядка

$$v_{\text{рез}} \sim \frac{\omega_B}{\omega_p} c. \quad (16.17)$$

Энергия таких частиц $mv_{\text{рез}}^2/2 \sim B_0^2/8\pi n_0$, т. е. порядка энергии магнитного поля, приходящейся на одну частицу плазмы. Соотношению (16.17) можно придать другой

наглядный смысл:

$$\beta \approx n_1/n_0. \quad (16.18)$$

Для неустойчивости необходимо, чтобы при каких-либо значениях поперечной скорости

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right]_{v_z=v_{\text{рез}}} > 0. \quad (16.19)$$

При двумаксвелловском F это означает

$$T_{\perp}/T_{\parallel} > 1 + (ck_z/\omega_p)^2. \quad (16.20)$$

Правую часть неравенства можно выразить через ω , и тогда критерий возбуждения колебаний с заданной частотой будет иметь вид

$$T_{\parallel}/T_{\perp} < 1 - |\omega/\omega_B|. \quad (16.21)$$

Инкремент колебаний (16.15) при двумаксвелловском распределении быстрых электронов равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} \omega_B^2}{|k_z| v_{T\parallel}} \cdot \frac{q^2}{(1+q)^3} \cdot \frac{n_1}{n_0} \times \left[q \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) - 1 \right] \exp \left[- \left(\frac{\omega_B}{k_z (1+q) v_{T\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (16.22)$$

Он не экспоненциально мал, если левая часть неравенства (16.20) хотя бы в два раза превышает правую.

§ 16.4. Раскачка низкочастотных колебаний с $k_{\perp} \neq 0$

В холодной плазме с $\omega_p^2 \gg \omega_B^2$ при $k_{\perp} \neq 0$, $k_z \neq 0$ и $k \ll \omega_p/c$ имеется ветвь низкочастотных колебаний с законом дисперсии (16.10) — вистлер-мода. Рассмотрим взаимодействие этих колебаний с группой быстрых электронов малой плотности, $n_1 \gg n_0$.

1. Дисперсионное уравнение для косых волн в приближении $(ck/\omega_p)^2 \rightarrow 0$. В пренебрежении малыми членами порядка $(ck/\omega_p)^2$ непотенциальные колебания плазмы описываются дисперсионным уравнением типа (15.68). Если плазма содержит холодные и горячие электроны, то

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \epsilon_{\alpha\beta}^{(1)}. \quad (16.23)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ определяется соотношениями (16.3), а $\epsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ — соотношениями (П.15.20). При $\omega \ll \omega_B$ компоненты $\epsilon_{11}^{(0)} = \epsilon_{22}^{(0)}$ малы по сравнению с $\epsilon_{12}^{(0)}$. Поэтому можно принять, что из всех компонент $\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$, $(\alpha, \beta) = (1, 2)$, отличны от нуля только $\epsilon_{12}^{(0)} = -\epsilon_{21}^{(0)} = i\omega_p^2/\omega\omega_B$. В этом приближении для случая плазмы, содержащей только холодные электроны, получаем дисперсионное уравнение (16.10). При наличии быстрых электронов из (15.68) и (16.23) следует:

$$(N^2 \cos \theta + i\epsilon_{12}^{(0)}) (N^2 \cos \theta - i\epsilon_{12}^{(0)}) + \\ + 2\epsilon_{12}^{(0)}\epsilon_{12}^{(1)} - N^2 (\epsilon_{11}^{(1)} + \epsilon_{22}^{(1)} \cos^2 \theta) = 0. \quad (16.24)$$

Учитывая, что в пренебрежении вкладом быстрых частиц решения уравнения (16.24) таковы, что $N^2 \cos^2 \theta = \mp i\epsilon_{12}^{(0)}$, представим это уравнение в виде

$$N^2 \cos \theta \pm i\epsilon_{12}^{(0)} - \epsilon_{\pm}^{(1)}/\cos \theta = 0, \quad (16.25)$$

где

$$\epsilon_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} (\epsilon_{11}^{(1)} \mp 2i \cos \theta \epsilon_{12}^{(1)} + \cos^2 \theta \epsilon_{22}^{(1)}) = \\ = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[(n/\xi) J_n \pm \cos \theta J'_n]^2}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \cdot \frac{v_{\perp}^3}{2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right] \right\rangle. \quad (16.26)$$

Здесь была использована формула (П.15.20), определяющая явный вид компонент $\epsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$.

Полагая $\omega = \omega_{\pm}^{(0)} + \omega_{\pm}^{(1)}$, где $\omega_{\pm}^{(0)}$ — решение пулевого приближения (16.10), из (16.25) находим уравнение для поправки к частоте

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \mp \frac{\omega_B}{\cos \theta} \left(\frac{\omega_{\pm}^{(0)}}{\omega_p} \right)^2 \epsilon_{\pm}^{(1)}. \quad (16.27)$$

Если $\epsilon_{\pm}^{(1)}$ не имеет полюса при $\omega = \omega_{\pm}^{(0)}$, то достаточно учитывать только мнимый вклад правой части (16.27). При этом из (16.27) получаем выражение для инкремента колебаний:

$$\gamma = \frac{\pi\omega_B^2 (ck)^2}{|k_z| \omega_p^4} \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{v_{\perp}^3}{2} dv_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n}{\xi} J_n \pm \cos \theta J'_n \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right] \right\}_{v_z=v_{\text{рез}}^{(n)}}, \quad (16.28)$$

где $v_{\text{рез}}^{(n)} = (\omega_{\pm}^{(0)} - n\omega_B)/k_z$. При $\theta = 0$ этот результат совпадает с (16.15), если в последнем принять $(ck)^2 \ll \omega_p^2$.

2. Стабилизирующий эффект черенковского резонанса. С помощью (16.28) находим инкремент колебаний с $k_z v_{T\parallel} \ll \omega_B$:

$$\gamma = \frac{\alpha \sqrt{\pi} \omega_B^2}{|k_z| v_{T\parallel}} \left\{ \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega_B}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{ck_z}{\omega_p} \right)^2 \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \cdot \frac{k_{\perp}^2 T_{\perp}}{m\omega_B^2} \right\}. \quad (16.29)$$

Из этого выражения видно, что при $k_z \neq 0$ анизотропная раскачка электромагнитных колебаний ослабляется. Полная стабилизация имеет место при

$$\frac{k_{\perp}^2 T_{\perp}}{m\omega_B^2} > \left(\frac{\omega_p}{ck_z} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{\omega_B}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (16.30)$$

Стабилизирующий эффект связан с черенковским резонансом [член с $n = 0$ в сумме (16.28)], проявляющимся только при $k_{\perp} \neq 0$.

§ 16.5. Электромагнитные неустойчивости в пучковых системах с анизотропным распределением частиц по скоростям

1. Предварительные замечания. Пучок электронов, движущихся вдоль магнитного поля, может раскачивать электростатические и электромагнитные колебания плазмы. Условия раскачки этих двух типов колебаний, однако, существенно различны. Например, электростатическая неустойчивость холодного пучка проявляется сильнее всего при $k_{\perp} = 0$, см. § 7.1, тогда как электромагнитные возмущения с $k_{\perp} = 0$ холодным пучком не раскачиваются вовсе, см. п. 2. Электромагнитные неустойчивости весьма чувствительны к анизотропии скоростного распределения частиц пучка. В частности, колебания с $k_{\perp} = 0$, устойчивые в приближении холодного пучка, гидродинамически неустойчивы, если $T_{\parallel} = 0$, $T_{\perp} \neq 0$, п. 3. При конечных T_{\parallel}/T_{\perp} электромагнитные возмущения с $k_{\perp} = 0$ неустойчивы кинетически, п. 4.

Существенно иной класс пучково-анизотропных неустойчивостей обнаруживается при $k_{\perp} \neq 0$, п. 5. В этом случае для раскачки колебаний достаточно наличия только продольной энергии частиц, $T_{\perp} \rightarrow 0$, асимметрии распределения по продольным скоростям, не обязательно связанной с положительной производной $v_z \partial f / \partial v_z$.

2. Раскачка колебаний холодным пучком. Пусть группа быстрых частиц имеет функцию распределения $F = n_1 \delta(v_z - V) \delta(\varepsilon_{\perp})$. Тогда выражение (16.26) имеет вид

$$\varepsilon_{\perp}^{(1)} = -\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} (\omega - k_z V) \left[\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\omega - \omega_B - k_z V} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\omega + \omega_B - k_z V} \right]. \quad (16.31)$$

Из (16.27) и (16.31) находим, что пучок раскачивает колебания холодной плазмы при $k_z \approx \omega_B / V$. Колебания с таким k_z имеют частоту

$$\text{Re } \omega = \left(\frac{c \omega_B}{V \omega_p} \right)^2 \frac{\omega_B}{\cos \theta} \quad (16.32)$$

и инкремент

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/2} \frac{\omega_p}{|\cos \theta|^{1/2}} (1 - |\cos \theta|). \quad (16.33)$$

Неустойчивость возможна только при $\cos \theta \neq 1$. Именно при этом в дисперсионное уравнение входит слагаемое с резонансным знаменателем $\omega - \omega_B - k_z V$, соответствующее циклотронному взаимодействию частиц с волной при аномальном эффекте Доплера. Условия $k_z \approx \omega_B / V$ и $k_z \ll \omega_p / c$ не противоречивы при

$$V/c > \omega_B / \omega_p, \quad (16.34)$$

т. е. при достаточно большой скорости пучка.

3. Раскачка колебаний пучком с конечной поперечной энергией частиц. Теперь предположим, что помимо продольно направленной скорости частицы имеют некоторую поперечную скорость, так что

$$F = n_1 \delta(v_z - V) f_{\perp}(\varepsilon_{\perp}), \quad (16.35)$$

где

$$\int \varepsilon_{\perp} f_{\perp}(\varepsilon_{\perp}) d\varepsilon_{\perp} \equiv \bar{v}_{\perp}^2 / 2 \neq 0. \quad (16.36)$$

Покажем, что в отличие от предыдущего пункта неустойчивость может иметь место и при $k_{\perp} = 0$. При условиях (16.35), (16.36), $k_{\perp} = 0$ выражение (16.26) сводит-

ся к следующему:

$$\varepsilon_{\perp}^{(1)} = -\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega - k_z V}{\omega - \omega_B - k_z V} + \frac{k_z^2 \bar{v}_{\perp}^2 / 2}{(\omega - \omega_B - k_z V)^2} \right]. \quad (16.37)$$

Из (16.37) и (16.27) находим, что частота колебаний комплексна при $\omega - \omega_B - k_z V \approx 0$. Это условие соответствует циклотронному взаимодействию частиц с волной при нормальном эффекте Доплера. Поскольку $\omega \ll \omega_B$, то приближенно $k_z \approx -\omega_B / V$. Частота колебаний определяется соотношением (16.32), а максимальный инкремент нарастания колебаний равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/2} \left(\frac{\bar{v}_{\perp}^2}{2V^2} \right)^{1/2} \omega_B. \quad (16.38)$$

Это одна из разновидностей пучково-анизотропных неустойчивостей, связанная с раскачкой чисто электромагнитных возмущений. Для ее существования необходимо выполнение условия (16.34), а также условия достаточно малого продольного теплового разброса пучка, $\gamma > k_z v_{T\parallel} \approx \omega_B v_{T\parallel} / V$.

4. Кинетическая пучково-анизотропная неустойчивость. Указанное выше условие малости продольного теплового разброса частиц по скоростям не выполняется, если

$$\frac{v_{T\parallel}}{V} > \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/2} \left(\frac{\bar{v}_{\perp}^2}{V^2} \right)^{1/2}. \quad (16.39)$$

При больших $v_{T\parallel}$ возможна еще одна разновидность пучково-анизотропных неустойчивостей — кинетическая. При $k_{\perp} = 0$ и двумаквелловском F с $T_{\parallel} \neq 0$ из (16.28) следует:

$$\gamma = -\pi \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_B}{|k_z| v_{T\parallel}} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \left\{ \left[\omega - k_z V - \omega_B \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_B - k_z V}{k_z v_{T\parallel}} \right)^2 \right] \right\}_{\omega = \omega_{\perp}^{(1)}}. \quad (16.40)$$

Если $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$ и $V > v_{T\parallel}$, то

$$\gamma \approx \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{V}{v_{T\parallel}} \cdot \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \omega_B. \quad (16.41)$$

Для справедливости этого результата необходимо также выполнение условия (16.34).

5. Раскачка вистлеров убегающими электронами. Пусть в плазме наряду с холодными электронами имеется небольшая доля быстрых электронов с отличной от нуля средней скоростью вдоль магнитного поля. Предполагаем, что поперечная энергия быстрых электронов мала по сравнению с их продольной энергией, $T_{\perp} \rightarrow 0$. Такая ситуация может иметь место в плазме, помещенной в продольное электрическое поле. Роль группы быстрых частиц в этом случае играют убегающие электроны.

Предполагаем плотность холодных электронов столь большой, что выполняется условие $\omega_p/\omega_B \gg 1$. Рассмотрим возможность раскачки быстрыми частицами низкочастотных длинноволновых колебаний такой плазмы, $\omega \ll \omega_B$, $k \ll \omega_p/c$. В пренебрежении эффектами быстрых частиц такие колебания соответствуют ветви свистящих атмосфериков и характеризуются вещественной частотой (16.10). Взаимодействие быстрых частиц с этими колебаниями может приводить к их нарастанию или затуханию с инкрементом, определяемым общим выражением (16.28). Используя принятое выше предположение об отсутствии у быстрых частиц поперечных скоростей, $F = n_1 \delta(v_{\perp}) \times \times f_{\parallel}(v_z)$, это выражение можно существенно упростить и записать его в следующем виде:

$$\gamma = -\frac{\pi \alpha \omega_B^2}{4 |k_z| \cos \theta} \left[(1 + \cos \theta)^2 f_{\parallel} \left(-\frac{\omega_B}{k_z} \right) - (1 - \cos \theta)^2 f_{\parallel} \left(\frac{\omega_B}{k_z} \right) \right]. \quad (16.42)$$

Здесь предполагается, что ω_B , k_z и $\cos \theta$ положительны. Скобки $(\pm \omega_B/k_z)$ означают аргумент f_{\parallel} .

При $k_{\perp} = 0$ правая часть (16.42) всегда отрицательна, т. е. колебания, распространяющиеся строго вдоль магнитного поля, затухают. При $k_{\perp} \neq 0$ имеет место неустойчивость, если

$$f_{\parallel} \left(\frac{\omega_B}{k_z} \right) \geq \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 f_{\parallel} \left(-\frac{\omega_B}{k_z} \right). \quad (16.43)$$

Это означает, что число частиц со скоростями $v_z = \pm \omega_B/k_z$ должно быть различно, что характерно для пучковых систем и для плазмы с некоторой долей убегающих электро-

нов. Например, в случае плазмы с убегающими электронами $f_{\parallel}(-|v_z|) = 0$, так что условие (16.43) выполняется автоматически при всех $\cos \theta \neq 1$.

Для неустойчивости вовсе не обязательно, чтобы функция $f_{\parallel}(v_z)$ имела максимум при $v_z \neq 0$, как это должно быть в случае электростатической пучковой неустойчивости. Существенно, однако, другое условие, а именно наличие частиц с достаточно большими скоростями. Это вытекает из того, что $k_z \ll \omega_p/c$, и потому условие $v_z = \omega_B/k_z$ удовлетворяется только при

$$v_z/c > \omega_B/\omega_p. \quad (16.44)$$

Качественно результаты низкочастотного приближения остаются в силе вплоть до $k_z \sim \omega_p/c$, так что неравенство (16.44) не обязательно должно быть сильным.

Библиографический обзор к гл. 16

1. Гершман Б. П., Трахтеперц В. Ю. Ультранизкочастотное радиоизлучение верхней атмосферы и его связь с другими геофизическими явлениями. — «Успехи физ. наук», 1966, т. 89, с. 201.
2. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М., «Наука», 1968.
3. Kennel C. F., Petschek H. E. Limit of stably trapped particle fluxes. — «J. Geophys. Res.», 1966, v. 71, p. 1.
4. Kennel C. F. Low-frequency whistler mode. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2190.
В работах [1—4] рассматривались электромагнитные неустойчивости плазмы, содержащей малую долю анизотропных электронов (§ 16.3, 16.4).
5. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
В § 2 работы [5] получены результаты, приведенные в § 16.4, и часть результатов, приведенных в § 16.5.
6. Файнберг Я. Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. — «Атомная энергия», 1961, т. 11, с. 313.
7. Ахнезер А. П. и др. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
8. Bell T. F., Buneman O. Plasma instability in the whistler mode caused by a gyrating electron stream. — «Phys. Rev.», 1964, v. 133A, p. 1300.
9. Brice N. Fundamentals of very low frequency emission generation mechanisms. — «J. Geophys. Res.», 1964, v. 69, p. 4515.
10. Gendrin R. Gyroresonance radiation produced by proton and electron beams in different regions of the magnetosphere. — «J. Geophys. Res.», 1965, v. 70, p. 5369.

11. Pruska A. Cyclotron instabilities in the magnetosphere. — «J. Geophys. Res.», 1966, v. 71, p. 1377.
12. Желзняков В. В. О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц в плазме. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1959, т. 2, с. 14.
13. Желзняков В. В. Радионизлучение Солнца и планет. М., «Наука», 1964.
В работах [6—13] обсуждаются электромагнитные неустойчивости в пучковых системах, § 16.5. В работе [8] был рассмотрен простейший пример пучковой системы, когда электромагнитная неустойчивость является первостепенной: пучок с большой поперечной энергией частиц (п. 3 § 16.5).
14. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. Неустойчивость одномерных пучков и поглощение электромагнитных волн в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 1009.
В работе [14] впервые была рассмотрена электромагнитная неустойчивость убегающих электронов (п. 5 § 16.5).
15. Zayed K. E., Kitsenko A. V. On the interaction of a gyrating electron beam with a cold plasma. — «Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 147.
Рассматриваются различные разновидности пучково-анизотропной раскачки электромагнитных волн.
16. Егоренков В. Д. Об электромагнитных неустойчивостях плазмы с группой горячих электронов. — «Журн. техн. физ.», 1973, т. 43, с. 266.
17. Егоренков В. Д., Степанов К. Н. Об электромагнитных неустойчивостях плазмы конечного давления с горячими электронами. — «Журн. техн. физ.», 1973, т. 43, с. 270.
В работах [16, 17] исследуются аperiodические неустойчивости типа планговой и зеркальной (см. гл. 15 и 18) при $\omega_{pi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. Учитывается «копус потерь».

ГЛАВА 17

ПЛАЗМА С ИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ
ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ ПРИ $df_0/dv > 0$ § 17.1. Неустойчивость
отрицательной массы

Будем полагать отношение скорости электронов v к скорости света c конечным; распределение электронов по импульсам δ -функциональным:

$$f_0(p) \sim n_0 \delta(p^2 - p_0^2). \quad (17.1)$$

Рассмотрим возмущения такой плазмы с $k_z = 0$ и $E \perp B_0$. Дисперсионное уравнение для возмущений этого типа

имеет вид

$$\epsilon_{11} (\epsilon_{22} - N^2) + \epsilon_{12}^2 = 0, \quad (17.2)$$

где элементы ϵ_{ik} определяются формулой (П.15.25).

Если плотность плазмы достаточно мала, так что $\omega_p \ll \ll kc$, то уравнение (17.2) распадается на два:

$$\epsilon_{11} = 0; \quad (17.3)$$

$$\epsilon_{22} - N^2 = 0. \quad (17.4)$$

Первое описывает электростатические возмущения с $\omega \ll \ll kc$, а второе — электромагнитные волны с $\omega \approx kc$. В этом параграфе исследуем уравнение (17.3). При $f_0(p)$ вида (17.1), $v/c \ll 1$, $k_z = 0$ и $\xi \ll 1$ с помощью (П.15.25) находим:

$$\epsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{\omega_p^2}{6} \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \left[\frac{1}{(\omega - \omega_B)^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_B)^2} \right] = 0. \quad (17.5)$$

При $\omega_p \ll \omega_B$ и $\omega \approx \omega_B$ отсюда получаем более простой результат:

$$1 - \frac{\omega_{p\text{эф}}^2}{(\omega - \omega_B)^2} = 0, \quad (17.6)$$

где

$$\omega_{p\text{эф}}^2 = - \frac{v_0^2}{6c^2} \omega_p^2. \quad (17.7)$$

Уравнение (17.6) аналогично дисперсионному уравнению ленгмюровских колебаний движущейся плазмы

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv)^2} = 0 \quad (17.8)$$

с тем существенным отличием, что $\omega_p^2 > 0$, а $\omega_{p\text{эф}}^2 < 0$. Аналогия была бы полной, если бы частицы пучка имели отрицательную массу m , так как при $m < 0$ $\omega_p^2 \sim 1/m < 0$.

Уравнение (17.6) имеет решение:

$$\omega = \omega_B \pm \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{v_0}{c} \omega_p. \quad (17.9)$$

Один из корней соответствует нарастающим возмущениям, $\text{Im } \omega > 0$, т. е. неустойчивости. Имея в виду аналогию с ленгмюровскими колебаниями, описываемыми уравнением (17.8), эту неустойчивость называют неустойчивостью типа отрицательной массы.

§ 17.2. Неустойчивость колебаний на верхней гибридной частоте в плазме, содержащей небольшую долю релятивистских электронов

1. Дисперсионное уравнение. Пусть в холодной плазме содержится небольшое число релятивистских электронов, $n_1/n_0 \ll 1$. Тогда в приближении электростатических возмущений имеем дисперсионное уравнение

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^{(0)} + \epsilon_{11}^{(1)} = 0, \quad (17.10)$$

где

$$\epsilon_{11}^{(0)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{B0}^2}, \quad \omega_{B0} = \omega_B |_{(v/c) \rightarrow 0}; \quad (17.11)$$

$$\epsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d^3p \frac{1}{v_{\perp}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \sum_n \frac{\omega J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B)}{\omega - n\omega_B}. \quad (17.12)$$

При F , сферически-симметричном по углам в пространстве скоростей:

$$\epsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \sum_n \frac{\omega J_n^2(k_{\perp} v \sin \vartheta / \omega_B)}{\omega - n\omega_B}. \quad (17.13)$$

Будем простоты ради интересоваться только возмущениями с $k_{\perp} v \sin \vartheta / \omega_B \gg 1$. При этом приближению $J_n^2(\xi) = (\pi \xi)^{-1}$, так что

$$\epsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2}{k^3} \sum_n \int \frac{\omega \omega_B}{\omega - n\omega_B} \cdot \frac{p^2}{v^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} dp. \quad (17.14)$$

2. Неустойчивость гидродинамического типа. Пусть $F(p) = (n_1/2p_0^2) \delta(p - p_0)$. При $p_0 \ll m_0 c$ для такого F из (17.14) следует:

$$\epsilon_{11}^{(1)} = \frac{4\pi e^2 n_1}{m k^2 c^2} \cdot \frac{\omega_B}{k v_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega - n\omega_B} \right)^2. \quad (17.15)$$

С помощью (17.10), (17.11) и (17.15) находим, что быстрые электроны раскачивают колебания верхней гибридной

частоты

$$\omega^{(0)} = (\omega_p^2 + \omega_{B0}^2)^{1/2}, \quad (17.16)$$

если эта частота попадает в резонанс с n -й гармоникой циклотронной частоты быстрых электронов:

$$\omega_p^2 + \omega_{B0}^2 \approx (n\omega_B)^2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (17.17)$$

Инкремент этой неустойчивости порядка

$$\gamma \approx \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/2} \left(\frac{nv_0}{c} \right)^{2/3} \frac{\omega_B^2}{k v_0}. \quad (17.18)$$

Неустойчивость такого типа возможна только в плазме с $\omega_p > \omega_B$, причем номер раскачиваемой гармоники вполне определен: $n = 1 + (\omega_p / \omega_B)^2$.

3. Кинетическая неустойчивость. Если распределение быстрых частиц по импульсам не δ -функциональное, то результат (17.18) справедлив при $\gamma > (p_0 \Delta p / m_0^2 c^2) \omega_B$. В противном случае вместо (17.18) из (17.10) и (17.14) следует, что имеет место кинетическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\omega_k^4 c^2}{k^2} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial p} \right)_{v=v_n}, \quad (17.19)$$

где

$$v_n = c \left[1 - \left(\frac{\omega}{n\omega_{B0}} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \int F dv = 1. \quad (17.20)$$

Видно, что $\gamma > 0$ (неустойчивость), если при $v = v_n$ производная функции распределения положительна.

§ 17.3. Мазерная раскачка электромагнитных волн в релятивистской плазме

Как и в § 17.2, рассмотрим возмущения с $k_z = 0$, но теперь исследуем уравнение для электромагнитных волн (17.4), которое имеет явный вид:

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} +$$

$$+ \frac{4\pi e^2 n_0}{\omega} \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_{\perp} (J'_n)^2 \partial F / \partial p_{\perp}}{\omega - n\omega_{B0} (1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 0; \quad (17.21)$$

нормировка F здесь такова, что $\int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} F = 1$.

Полагая плотность достаточно малой, находим:

$$\text{Re } \omega = ck,$$

$$\text{Im } \omega = 2\pi^2 e^2 n_0 \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{\perp} (J'_n)^2 \times \\ \times \frac{\partial F}{\partial p_{\perp}} \delta[\omega - \omega_{B0} (1 - v^2/c^2)^{1/2}]. \quad (17.22)$$

Остановимся более подробно на случае слаборелятивистской плазмы, $v/c \ll 1$. При $v/c \ll 1$ и выполнении резонансного условия типа $ck \approx \omega_B$ можно считать $\xi \ll 1$. Поэтому в сумме (17.22) важен только один член, $n = 1$, так что

$$\gamma = \frac{\pi \omega_p^2}{2} \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \delta\left(\omega - \omega_{B0} + \omega_{B0} \frac{v^2}{2c^2}\right). \quad (17.23)$$

Для сферически-симметричного F

$$\gamma = \frac{\pi \omega_p^2}{6} \int_0^{\infty} p^3 \frac{\partial F}{\partial p} \delta\left(\omega - \omega_{B0} + \omega_{B0} \frac{v^2}{2c^2}\right) dp. \quad (17.24)$$

Если при некотором p производная $\partial F / \partial p$ положительна, то $\gamma > 0$, т. е. имеет место неустойчивость. Инкремент неустойчивости при $\partial F / \partial p \simeq F/p$ порядка

$$\gamma \simeq \omega_p^2 / \omega_B. \quad (17.25)$$

Это так называемая синхротронная неустойчивость. Она описывает процесс реабсорбции синхротронного излучения.

§ 17.4. Раскачка электромагнитных колебаний в слабоионизованной плазме инертных газов

При изотропном распределении частиц по скоростям дисперсионное уравнение электромагнитных колебаний нерелятивистской плазмы при $k_{\perp} = 0$ и $|\omega - \omega_B| \gg$

$\gg k_{\perp} v_z$ имеет вид

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{\omega \omega_p^2}{3} \int_0^{\infty} v^3 dv \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - \omega_B} = 0. \quad (17.26)$$

Здесь принята нормировка $\int f_0 v^2 dv = 1$. Результат (17.26) вытекает из общих уравнений (П.15.26) и (П.15.28). Если существенны столкновения электронов между собой или с другими частицами, то знаменатель $\omega - \omega_B$ в (17.26) должен быть заменен $\omega - \omega_B + iv(v)$, где $v(v)$ — частота столкновений электрона, обладающего скоростью v . Поэтому для столкновительной плазмы вместо (17.26) будем иметь

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{\omega \omega_p^2}{3} \int_0^{\infty} v^3 dv \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - \omega_B + iv(v)} = 0. \quad (17.27)$$

При малой плотности плазмы отсюда следует:

$$\text{Re } \omega = ck,$$

$$\gamma = -\frac{\omega_p^2}{6} \int_0^{\infty} dv f_0(v) \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^3 v(v)}{(ck - \omega_B)^2 + v^2(v)} \right]. \quad (17.28)$$

Видно, что при моноэнергетическом распределении электронов, $f_0 \sim \delta(v - v_0)$, электромагнитные колебания могут нарастать во времени, если

$$\frac{\partial}{\partial v} [v^3 v(v)]_{v=v_0} < 0. \quad (17.29)$$

Для неустойчивости необходимо, чтобы частота столкновений электронов падала быстрее, чем v^{-3} . Это условие удовлетворяется при столкновениях достаточно медленных ($mv_0^2/2$ порядка нескольких электронвольт) электронов с атомами инертных газов.

Библиографический обзор к гл. 17

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Устойчивость заряженного пучка в накопительных системах.—«Атомная энергия», 1959, т. 7, с. 549.
2. Nielsen C., Sessler A. Longitudinal space charge effects in particle accelerators.—«Rev. Scient. Instrum.», 1959, v. 30, p. 80.

3. Landau R. W., Neil V. K. Negative mass instability. — «Phys. Fluids», 1967, v. 9, p. 2412.
4. Briggs R. J., Neil V. K. Negative mass instability in a cylindrical layer of relativistic electrons. — «Plasma Phys.», 1967, v. 9, p. 209.
5. Grewal M. S., Byers I. A. A computational study of the negative mass instability in the non-linear regime. — «Plasma Phys.», 1969, v. 11, p. 727.
6. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
В работах [1—5] исследуется неустойчивость отрицательной массы в случае, когда все электроны вращаются вокруг общего центра. В работе [6] рассмотрена неустойчивость пространственно-однородной плазмы с δ -функциональным распределением по скоростям (§ 17.1).
7. Blanken R. A. Two-component electron distribution instabilities near $2\Omega_e$. — «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1968, v. 13, p. 280.
8. Blanken R. A., Kuckes A. F. Synchrotron deceleration of electrons in a plasma and the generation of electromagnetic radiation. — «Plasma Phys.», 1969, v. 11, p. 321.
9. Blanken R. A., Stix T. H., Kuckes A. F. Relativistic cyclotron instabilities. — «Plasma Phys.», 1969, v. 11, p. 945.
10. Злотник Е. Я. О гидродинамической неустойчивости электромагнитных и плазменных волн на гармониках гидрочастоты. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1973, т. 16, с. 1652.
В работах [7—10] исследуются неустойчивости плазмы, содержащей группу релятивистских электронов с немаксвелловским распределением по скоростям (§ 17.2).
11. Гапонов А. В. О неустойчивости системы возбужденных осцилляторов по отношению к электромагнитным возмущениям. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 326.
12. Schneider J. Stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a magnetic field. — «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 504.
13. Bekefi G. e.a. Kirchhoff's radiation law for plasmas with non-maxwellian distributions. — «Phys. Fluids», 1961, v. 4, p. 173.
14. Twiss Q. R. Radiation transfer and the possibility of negative absorption in radio astronomy. — «Australian J. Phys.», 1958, v. 11, p. 364.
15. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., «Мир», 1971, с. 369.
В работах [1—14] рассматривается лазерная раскачка электромагнитных волн в релятивистской плазме (§ 17.3). В тех же работах можно найти сведения о некоторых других неустойчивостях, вызываемых релятивистскими электронами. В [13] и [15] обсуждается также раскачка электромагнитных волн в слабоионизованной плазме инертных газов, § 17.4.
16. Idehara T., Sugara R. Collision induced instabilities near electron cyclotron harmonics in plasma. — «J. Phys. Soc. Japan», 1967, v. 23, p. 1122.
Рассматривается столкновительная неустойчивость (§ 17.4).

17. Железняков В. В. Об отрицательной реабсорбции синхротронного излучения. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 570.
18. Железняков В. В. О когерентном синхротронном механизме радиоизлучения некоторых внеземных источников. — «Астроном. журн.», 1967, т. 44, с. 44.
19. Железняков В. В. О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц в плазме. «Изв. вузов. Радиофизика», 1959, т. 2, с. 14.
20. Железняков В. В. О неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно высокочастотных электромагнитных возмущений. «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1960, т. 3, с. 57, 180; 1961, т. 4, с. 649, 849.
В работах [17—20] рассмотрены некоторые разновидности электромагнитных неустойчивостей в плазме с релятивистскими электронами.
21. Zayed K. E., Kilsenko A. V. On the interaction of a gyrating electron beam with a cold plasma. — «Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 147.
Проводится релятивистское рассмотрение гидродинамической неустойчивости двухкомпонентной плазмы с электронами, неравновесными по поперечным скоростям.
22. Злотник Е. Я. Неустойчивость продольных циклотронных волн в разреженной плазме с дисперсией электронов по скоростям. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1974, т. 17, с. 17.
Исследуется неустойчивость плазменных волн в неравновесной плазме с тепловым разбросом по продольным и поперечным импульсам. Неустойчивость обнаруживается при учете «релятивизма» электронов.

ГЛАВА 18

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМИ ИОНАМИ

§ 18.1. Предварительные замечания

Содержание этой главы близко к тому, что обсуждалось в гл. 15. Мы рассмотрим неустойчивости, вызываемые анизотропией скоростного распределения частиц. Отличие от гл. 15 состоит в том, что там анизотропными полагались электроны, а здесь — ионы. При исследовании электронных неустойчивостей можно было пренебречь движением ионов, считая их бесконечно тяжелыми, так что диэлектрическая проницаемость определялась только одной компонентой плазмы — электронной. В этом отношении задача о неустойчивостях, вызываемых ионной анизотропией, более сложна, поскольку вследствие малой

массы электронов, их движение необходимо учитывать наряду с движением ионов.

Приятая ниже схема изложения теории ионных анизотропных неустойчивостей в целом аналогична той, которой мы следовали в гл. 15; сначала рассматриваются неустойчивости плазмы с большим β (приближение нулевого магнитного поля), затем постепенно учитываются эффекты, связанные с конечностью параметра $1/\beta$, и, наконец, производится анализ неустойчивостей плазмы с $\beta \ll 1$.

§ 18.2. Неустойчивость в приближении нулевого магнитного поля ($\beta \rightarrow \infty$)

Пусть электроны распределены по скоростям изотропно и имеют температуру T_e , а распределение ионов анизотропно и характеризуется двумаксвелловской функцией распределения (15.30). Полагаем, что магнитное поле, если таковое имеется в плазме, настолько мало, что его влиянием на движение электронов и ионов можно пренебречь. При этих предположениях дисперсионное уравнение для возмущений с $k_z = 0$ и $k_{\perp} = 0$ имеет вид, аналогичный (15.42) с тем отличием, что теперь в нем учитываются не только электроны, но и ионы. При условии $\omega \ll (k v_{Te}, k v_{Ti})$, которое в дальнейшем предполагается выполненным, это дисперсионное уравнение выглядит так:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} + 1 - \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - i \sqrt{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{\omega}{|k| v_{Te}} = 0, \quad (18.1)$$

где $T_{\max} = \max(T_{\perp i}, T_{\parallel i})$; $T_{\min} = \min(T_{\perp i}, T_{\parallel i})$.

Уравнение (18.1) имеет решение:

$$\omega = \frac{i |k| v_{Te}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} \right). \quad (18.2)$$

Видно, что имеет место неустойчивость, если

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \gg 1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2}. \quad (18.3)$$

Характерное волновое число этой неустойчивости порядка

$$k \simeq \omega_{pi}/c, \quad (18.4)$$

а характерный инкремент порядка

$$\gamma \simeq \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{v_{Ti}}{c} \omega_{pe}. \quad (18.5)$$

Эта величина в $(m_i/m_e)^{3/2}$ раз меньше инкремента неустойчивости плазмы с анизотропным распределением электронов [ср. (18.5) с (15.45)].

§ 18.3. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ при $k_z = 0$

При $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ результат предыдущего параграфа относится к возмущениям с $k_z = 0$. Рассмотрим, насколько эта неустойчивость чувствительна к магнитному полю. Магнитное поле сильнее всего влияет на движение электронов. Если, как и выше, пренебрегать влиянием магнитного поля на движение ионов, то при $\mathbf{B}_0 \neq 0$ вместо (18.1) с учетом (П.15.22), (П.15.24) получим

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} + 1 - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} + \frac{m_i}{m_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_e) \exp(-z_e)}{\omega - n \omega_{Be}} = 0. \quad (18.6)$$

Видно, что пренебрегать влиянием магнитного поля на движение электронов можно, если $\omega \gg \omega_{Be}$, $z_e \gg 1$. При условиях (18.4) и (18.5) это означает, что параметр β должен быть весьма большим:

$$\beta > (m_i/m_e)^3. \quad (18.7)$$

При $\beta \simeq (m_i/m_e)^3$ прежде всего нарушается условие $\omega > \omega_{Be}$. В обратном предельном случае, когда

$$\beta \ll (m_i/m_e)^3, \quad (18.8)$$

в уравнении (18.6) следует считать $\omega \ll \omega_{pe}$, и тогда для ω получается уравнение

$$\omega^2 = - \frac{m_e}{2m_i} (2\pi z_e)^{1/2} \omega_{Be}^2 \left(\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} - 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{m_i}{(2\pi z_e)^{1/2} m_e} \right). \quad (18.9)$$

Как следует из (18.9) неустойчивость возможна и при $\beta \ll (m_i/m_e)^3$, но для этого требуется очень большая анизотропия температур:

$$\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/2} \beta^{-1/2}. \quad (18.10)$$

§ 18.4. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $k_{\perp} = 0$

Если $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$, то рассмотрение § 18.2 относится к возмущениям с $k_{\perp} = 0$. Выясним, как изменяются эти результаты при не слишком малом магнитном поле, полагая, что последнее влияет только на движение электронов. Используя (П.15.26), (П.15.28) и учитывая $\omega \ll \omega_{Be}$, вместо (18.1) получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - i \sqrt{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} W\left(\mp \frac{\omega_{Be}}{|k_z| v_{Te}}\right)\right) = 0. \quad (18.11)$$

При $\omega_{Be} \ll k_z v_{Te}$ отсюда получается выражение для частоты (18.2), соответствующее приближению нулевого магнитного поля. Учитывая (18.4), заключаем, что такое приближение справедливо, если

$$\beta > m_i/m_e. \quad (18.12)$$

При $\beta \simeq m_i/m_e$ функция W порядка единицы, и тогда инкремент и частота колебаний порядка ионно-циклотронной частоты:

$$\gamma \approx \text{Re } \omega \approx \omega_{Hi}. \quad (18.13)$$

Условие неустойчивости (18.3) при этом остается в силе.

Если волновое число k_z достаточно мало, $k_z < \omega_{Be}/v_{Te}$, то решение (18.11) имеет вид

$$\omega = \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2}\right) \left\{ \pm \omega_{Bi} \mp \frac{i \sqrt{\pi} |\omega_{Hi} \omega_{Be}|}{|k_z| v_{Te}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_{Be}}{k_z v_{Te}}\right)^2\right] \right\}. \quad (18.14)$$

Инкремент таких возмущений экспоненциально мал. Однако при очень малом $k_z v_{Te}/\omega_{Be}$ формула (18.14) ста-

новится неприменимой, поскольку при ее получении пренебрегалось резонансным взаимодействием колебаний с ионами. Этот эффект обсуждается в следующем параграфе.

§ 18.5. Неустойчивости плазмы с $1 < \beta < m_i/m_e$

Из (18.14) следует, что при $\beta \ll m_i/m_e$ частота возмущений с $k_{\perp} = 0$ порядка ионно-циклотронной. Поэтому при исследовании резонансного взаимодействия колебаний с ионами следует учитывать влияние на них магнитного поля. Дисперсионное уравнение, учитывающее это влияние, получается с использованием (П.15.26), (П.15.28). Если $T_{\perp i}$ и $T_{\parallel i}$ одного порядка, то при $\beta \gg 1$ величины $\omega/(k_z v_{T\parallel i})$, $\omega_{Bi}/(k_z v_{T\parallel i})$ малы как $\beta^{-1/2}$. Вследствие этого дисперсионное уравнение упрощается и сводится к следующему:

$$\left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} + \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega}{\omega_{Bi}} - \frac{i \sqrt{\pi} m_i \omega}{m_e |k_z| v_{Te}}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{\omega_{Be}}{k_z v_{Te}}\right)^2\right] + \frac{i \sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \left[(\omega \mp \omega_{Hi}) \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}}\right) - \omega\right] = 0. \quad (18.15)$$

Отсюда

$$\text{Re } \omega = \pm \omega_{Bi} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2}\right); \quad (18.16)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} m_i \omega_{Bi}^2}{m_e |k_z| v_{Te}} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\omega_{Be}}{k_z v_{Te}}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{\pi} \omega_{Bi}^2}{|k_z| v_{T\parallel i}} \left[\left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}}\right)^2 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2}\right]. \quad (18.17)$$

Видно, что взаимодействие резонансных ионов с колебаниями может приводить к раскачке последних при любом знаке разности $1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i}$. Используя закон сохранения энергии для системы плазма — электромагнитное поле, можно убедиться в том, что при $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ имеет место раскачка волн с отрицательной энергией, а при $T_{\perp i} < T_{\parallel i}$ — волн с положительной энергией.

§ 18.6. Кинетические неустойчивости плазмы с $\beta \simeq 1$ при $k_{\perp} = 0$

При $\beta \ll 1$ в дисперсионном уравнении нужно учитывать все степени параметров $\omega/k_z v_{T\parallel i}$, $\omega_{Bi}/k_z v_{T\parallel i}$, так что в отличие от (18.15) теперь имеем

$$\frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega}{\omega_{Bi}} + 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} + i \frac{\sqrt{\pi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \times$$

$$\times \left[(\omega \mp \omega_{Bi}) \left(1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right) - \omega \right] W \left(\frac{\omega \mp \omega_{Bi}}{|k_z| v_{T\parallel i}} \right) = 0. \quad (18.18)$$

Если $\beta \sim 1$, $k_z \sim \omega_{pi}/c$ и $T_{\perp i} \simeq T_{\parallel i}$, то это уравнение имеет комплексные решения с

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_{Bi}. \quad (18.19)$$

Оказывается, что $\gamma > 0$ как при $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$, так и при $T_{\perp i} < T_{\parallel i}$. Эти решения соответствуют двум типам неустойчивости, обсуждавшимся в § 18.5.

При достаточно больших длинах волн, $k_z \ll \omega_{pi}/c$, решение (18.18) находим разложением функции W в ряд по обратным степеням аргумента. В случае $\beta_{\parallel} < \beta_{\perp} + 2$ вещественная часть частоты удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2 \left(1 - \frac{\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}}{2} \right); \quad c_A^2 \equiv B_0^2 / 4\pi n_0 m_i, \quad (18.20)$$

а инкремент равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} \omega_{Bi}^3 |1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i}|}{2k_z^2 v_{T\parallel i} c_A [1 - (\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})/2]^{3/2}} \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Bi}}{k_z v_{T\parallel i}} \right)^2 \right]. \quad (18.21)$$

Из (18.18) следует также, что частота колебаний вещественна, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^2 k_z^2}{\omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega_{Bi}}{\omega} + 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} &= 0; \\ (1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i}) (\omega \mp \omega_{Bi}) - \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

Эти соотношения характеризуют границу неустойчивости. Граничное значение волнового числа равно

$$|k_z \text{ гран}| = \frac{\omega_{pi}}{c} \left(\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} \right)^{1/2} \left| 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \right|, \quad (18.23)$$

а граничная частота колебаний

$$\omega_{\text{гран}} = \pm \omega_{Bi} (1 - T_{\parallel i}/T_{\perp i}). \quad (18.24)$$

Вблизи границы неустойчивости инкременты пропорциональны величинам

$$\gamma \sim \exp \left[- \frac{1}{\beta_{\parallel i} (1 - T_{\parallel i}/T_{\perp i})^2} \right], \quad T_{\perp i} > T_{\parallel i}; \quad (18.25)$$

$$\gamma \sim \exp \left[- \frac{1}{\beta_{\perp i} (1 - T_{\perp i}/T_{\parallel i})^2} \right], \quad T_{\parallel i} > T_{\perp i}. \quad (18.26)$$

Отсюда заключаем, что рассмотренные неустойчивости могут играть роль только при не слишком малых β , так как в противном случае их инкременты экспоненциально малы.

§ 18.7. Гидродинамическая неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ (шланговая неустойчивость)

Из уравнения (18.20) следует, что низкочастотные возмущения ($\omega \ll \omega_{Bi}$) с $k_{\perp} = 0$ аperiodически нарастают во времени, если

$$\beta_{\parallel} > \beta_{\perp} + 2. \quad (18.27)$$

Дисперсионное уравнение (18.20) и критерий неустойчивости (18.27) можно получить из уравнений одножидкостной гидродинамики с анизотропным давлением. При таком подходе движение плазмы описывается уравнением

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = - \nabla \overleftrightarrow{P} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (18.28)$$

Здесь $\rho \equiv m_i n$ — массовая плотность; \mathbf{B} — полное магнитное поле $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ (в наших обычных обозначениях $\mathbf{B} \rightarrow \rightarrow \mathbf{B}_0 + \cdot \mathbf{B}$); \overleftrightarrow{P} — тензор давления, характеризующийся компонентами

$$P_{ik} = P_{\parallel} e_i e_k + P_{\perp} (\delta_{ik} - e_i e_k), \quad (18.29)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{B}/B$. Символ $\nabla \overleftrightarrow{P}$ означает

$$\nabla \overleftrightarrow{P} = \nabla P_{\perp} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) (\mathbf{e} \nabla) \mathbf{e} + \mathbf{e} \text{ div } \mathbf{e} (P_{\parallel} - P_{\perp}). \quad (18.30)$$

Линеаризуя (18.28) и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, $\mathbf{V}' = -B_0 \partial \xi / \partial z$, $\partial \xi / \partial t \equiv \mathbf{V}'$, а p_{\parallel} , p_{\perp} не возмущаются, получаем уравнение для смещения ξ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(-\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho} + c_A^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (18.31)$$

Отсюда при $\xi \sim \exp(-i\omega t + ik_z z)$ непосредственно следуют дисперсионное уравнение (18.20) и критерий неустойчивости (18.27). Эта неустойчивость часто называется шланговой (fire-hose).

§ 18.8. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ на косых волнах (зеркальная неустойчивость)

1. Дисперсионное уравнение. Для простоты предполагаем температуру электронов малой, $T_e \rightarrow 0$. Общее дисперсионное уравнение (15.27) с $\epsilon_{\alpha\beta}$ вида (П.15.20) для низкочастотных, $(\omega, k_z, v_{T\parallel i}) \ll \omega_{Bi}$, колебаний с $k_{\perp} \neq 0$; $E_z = 0$ распадается на два:

$$\epsilon_{11} - N^2 \cos^2 \theta = 0; \quad (18.32)$$

$$\epsilon_{22} - N^2 = 0. \quad (18.33)$$

Первое соответствует альфвеновской ветви колебаний, второе — магнитно-звуковой.

При двумаксвелловском распределении ионов по скоростям выражения для ϵ_{11} , ϵ_{22} имеют вид:

$$\epsilon_{11} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \left[1 + \frac{k_z^2}{m_i \omega^2} (T_{\parallel i} - T_{\perp i}) \right]; \quad (18.34)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{11} - \beta_{\perp i} N^2 \sin^2 \theta \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} \left[1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{T\parallel}} \right) \right] \right\}. \quad (18.35)$$

Уравнение (18.32) есть обобщение (18.20) на случай $k_{\perp} \neq 0$ для альфвеновской ветви. Оно описывает возмущения, аперриодически нарастающие во времени при условии (18.27). При $k_{\perp} = 0$ из (18.33) также получается (18.20). Если же $k_{\perp} \neq 0$, то уравнение (18.33) описывает еще один тип неустойчивости, к анализу которой и перейдем.

2. Гидродинамическая неустойчивость сильноанизотропной плазмы с $T_{\perp i} \gg T_{\parallel i}$. Пусть $T_{\perp i} \gg T_{\parallel i}$. При этом (18.35) имеет следующее решение с $\omega \gg k_z v_{T\parallel i}$:

$$\omega^2 = -\frac{\beta_{\perp i} \sin^2 \theta}{1 - (1 + \sin^2 \theta) \beta_{\perp i} / 2} \cdot \frac{k_z^2 T_{\perp i}}{m_i}. \quad (18.36)$$

Частота возмущений чисто мнима, что соответствует так называемой зеркальной неустойчивости (в зарубежной литературе такая неустойчивость обозначается термином *mirror instability*). Частота (18.36) удовлетворяет условию $\omega \gg k_z v_{T\parallel i}$ даже при малом $\beta_{\perp i}$, если

$$\beta_{\perp i} > T_{\parallel i} / T_{\perp i}. \quad (18.37)$$

Зеркальная неустойчивость сильноанизотропной плазмы, как и шланговая, может быть изучена в приближении одножидкостной гидродинамики с анизотропным давлением.

4. Кинетическая неустойчивость плазмы с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$. Уравнение (18.33) с ϵ_{22} вида (18.35) имеет решение с $\omega \ll k_z v_{T\parallel i}$:

$$\omega = i \frac{k_z v_{T\parallel i}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i} \beta_{\perp i}} \left[\beta_{\perp i} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) - \right. \\ \left. - 1 - \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \left(1 + \frac{\beta_{\perp i} - \beta_{\parallel i}}{2} \right) \right], \quad (18.38)$$

если выражение, стоящее в квадратных скобках, близко к нулю. Это решение соответствует неустойчивости при условии

$$\beta_{\perp i} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) > 1 + \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \left(1 + \frac{\beta_{\perp i} - \beta_{\parallel i}}{2} \right). \quad (18.39)$$

Это — кинетический аналог рассмотренной выше гидродинамической неустойчивости.

§ 18.9. Сталкивающиеся плазмы

Пусть вдоль магнитного поля движутся две взаимопроникающие электрон-ионные плазмы с плотностями $n_1 = n_2$ и скоростями $V_1 \neq V_2$ (скоростью V_{α} , $\alpha = 1, 2$, обладают как электроны, так и ионы α -й компоненты плазмы). В зависимости от соотношения между тем-

ловыми и паправленными скоростями частиц в такой системе двух плазм могут развиваться различные типы неустойчивостей. Например, при $|V_1 - V_2| > (v_{Te1}, v_{Te2})$ должна развиваться электронная двухлучковая неустойчивость, см. § 1.5. При $(v_{Ti1}, v_{Ti2}) \ll |V_1 - V_2| \ll (v_{Te1}, v_{Te2})$ и $T_e \gg T_i$ должны раскачиваться ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания, см. § 3.5.

Если тепловой разброс ионов значителен, так что $(v_{Ti1}, v_{Ti2}) > |V_1 - V_2|$, то никакие электростатические неустойчивости в обсуждаемой системе двух плазм развиваться не могут. В этих условиях основную роль должна играть раскачка непотенциальных возмущений. Раскачка такого типа возмущений за счет анизотропии температур, $T_{||} > T_{\perp}$, была рассмотрена в предыдущих параграфах. Наличие относительного движения компонент плазмы вдоль магнитного поля означает, что средняя продольная энергия частиц больше поперечной, так что и в этом случае можно ожидать такие же эффекты, как и в плазме с $T_{||} > T_{\perp}$.

Перейдем к количественному анализу электромагнитной неустойчивости. Как и в § 18.7, полагаем $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, $\omega \ll \omega_{Bi}$. В этом приближении получаются дисперсионные уравнения для альфвеновских и магнитно-звуковых волн, но с другим значением компонент $\epsilon_{\alpha\beta}$. Уравнение для альфвеновских волн имеет явный вид

$$\sum_{\alpha=1,2} \frac{c^2}{c_{A\alpha}^2} \left(1 - \frac{k_z V_{\alpha}}{\omega}\right)^2 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} = 0. \quad (18.40)$$

В частном случае равных плотностей, $n_1 = n_2$, отсюда следует:

$$\omega^2 - k_z (V_1 + V_2) \omega + \frac{1}{2} k_z^2 (V_1^2 + V_2^2) - c_{A0}^2 k_z^2 = 0; \quad (18.41)$$

$$c_{A0}^2 = B_0^2 / 4\pi m_i n_0, \quad n_0 = 2n_1.$$

Эти колебания неустойчивы при

$$|V_1 - V_2| > 2c_{A0}. \quad (18.42)$$

Их инкремент зависит от k_z . В случае сильного неравенства (18.42) он порядка

$$\gamma \simeq k_z |V_1 - V_2|. \quad (18.43)$$

Максимум инкремента не превосходит ионно-циклотронной частоты, $\gamma_{\max} \leq \omega_{Bi}$.

Сходные результаты получаются для магнитно-звуковой ветви колебаний, если $k_z \gg k_{\perp}$. При $k_z \ll k_{\perp}$ для раскачки магнитно-звуковых колебаний требуется относительная скорость $|V_1 - V_2|$, гораздо большая, чем по условию (18.42).

Библиографический обзор к гл. 18

1. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Об ударных волнах в разреженной плазме, помещенной в слабое магнитное поле.—«Докл. АН СССР», 1962, т. 146, с. 329.
2. Moiseev S. S., Sagdeev R. Z. Collisionless shock waves in a plasma in a weak magnetic field.—«J. Nucl. Energy», 1963, v. C5, p. 43. В работах [1,2] указано на неустойчивость плазмы с анизотропными ионами в отсутствие магнитного поля (§ 18.2).
3. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70. Обсуждаются пределы применимости приближения $B_0 = 0$ и рассматриваются неустойчивости при $B_0 \neq 0$ (§ 18.3—18.5).
4. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 181. Обсуждаются кинетические неустойчивости плазмы с $\beta \approx 1$ и $k_{\perp} = 0$ (§ 18.6).
5. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О квазитермодинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле.— В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 268.
6. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Исследование устойчивости цилиндрического плазменного шнура методом кинетического уравнения. Там же, с. 54.
7. Веденов А. А., Сагдеев Р. З. О некоторых свойствах плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле.— Там же, с. 278.
8. Rosenbluth M. N. Stability and heating in the pinch effect.— «Proc. 2nd U.N. Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy». Geneva, 1958, v. 31, p. 85.
9. Chandrasekhar S. e.a. Properties of a ionized gas of low density in a magnetic field.—«Proc. Roy. Soc.», 1958, v. A245, p. 435.
10. Parker E. N. Dynamical instability in an anisotropic ionized gas of low density.—«Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 1874.
11. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов и электронов.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 38, с. 1841. В работах [5—11] была развита теория планговой и зеркальной неустойчивостей при $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ (§ 18.7, 18.8).

12. Михайловский А. Б. О дивергентной неустойчивости плазмы при большом ларморовском радиусе ионов.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 230.
13. Заславский Г. М., Моисеев С. С. О поведении некоторых состояний плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.—«Журн. прикл. мех. и техн. физ.», 1962, т. 6, с. 24.
14. Furth П. Р. The «mirror instability» for finite particle gyroradius.—«Nucl. Fus. Suppl.», 1962, pt 1, p. 169.
В работах [12–24] рассматривается зеркальная неустойчивость при конечных $k_{\perp} \rho_i$.
15. Алексин В. Ф., Яшин В. И. Исследование устойчивости плазмы с помощью обобщенного энергетического принципа.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 822.
Показано, что критерии виланговой и зеркальной неустойчивостей можно получить энергетическим методом.
16. Morse R. L. Bounce model pinch stability.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 4017.
17. Dickman D. O. et al. Numerical simulation of axisymmetric, collisionless finite- β plasma.—«Phys. Fluids», 1969, v. 12, p. 1708.
В работах [16, 17] проводится численный анализ зеркальной неустойчивости в условиях тета-пинча.
18. Галеев А. А. и др. Исследование «виланговой» неустойчивости в плазме, движущейся вдоль магнитного поля.—«Proc. VII Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases», Beograd, «Gradevinska Knjiga», 1965, v. II, p. 663.
19. Ломивадзе Д. Г., Степанов К. Н. О возбуждении магнитозвуковых волн в сталкивающихся плазменных потоках.—«Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 148.
В [18, 19] исследуется электромагнитная неустойчивость сталкивающихся плазм, § 18.9
20. Cordey J. G., Hastie R. J. Alfvén cyclotron resonance instability in mirror machines.—«Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 2291.
Обсуждается роль виланговой неустойчивости с $k_{\perp} = 0$ (§ 18.6) в условиях плазмы, удерживаемой в адиабатической ловушке.

ГЛАВА 19

КОНУСНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ
С КОНЕЧНЫМ β § 19.1. Пределы применимости
потенциального приближения

Рассмотрим плазму с электронной температурой, достаточно малой по сравнению с поперечной энергией ионов, $T_e/m_i v_{\perp i}^2 \rightarrow 0$. Распределение ионов по поперечным скоростям для простоты примем δ -функциональ-

ным (ср. с § 12.1):

$$f_i = \frac{n_0}{2\pi v_0} \delta(v_{\perp} - v_0). \quad (19.1)$$

Интересуемся возмущениями такой плазмы с частотами $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. Пренебрежем эффектами, связанными с конечностью электронной температуры, что законно, если $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, $\omega/k_z \gg v_{Te}$. Вклад электронов в тензор диэлектрической проницаемости в принятом приближении определяется соотношениями (16.3). Используя общие формулы Приложения к гл. 15, заключаем, что вклад ионов существен только в компоненте ϵ_{11} . При f_i вида (19.1) он равен:

$$\epsilon_{11}^{(i)} = - \frac{i_0 \omega_{pi}^2}{(k_{\perp}^2 v_0^2 - \omega^2)^{3/2}}. \quad (19.2)$$

С помощью соотношений (15.27), (16.3) и (19.2) получаем дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2 (1+q)^2} - \frac{i}{1+q} \cdot \frac{m_e}{m_i} \cdot \frac{\omega_{Be}^2}{(k_{\perp}^2 v_0^2 - \omega^2)^{3/2}} = 0, \quad (19.3)$$

где $q = (\omega_{pe}/ck)^2$. В предельном случае $\omega \gg k_{\perp} v_0$ это уравнение описывает колебания ветви свистящих атмосфериков. При $k \gg \omega_{pe}/c$ оно соответствует потенциальному приближению ($\mathbf{E} = -\nabla\psi$), обычно используемому в теории устойчивости плазмы нулевого давления, см. гл. 12. При этом условии из (19.3) следует, что плазма неустойчива. Характерные параметры этой неустойчивости таковы:

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_{\text{гибр}} \equiv |\omega_{Be} \omega_{Bi}|^{1/2}; \quad (19.4)$$

$$k_{\perp} \rho_i \simeq (m_i/m_e)^{1/2}; \quad (19.5)$$

$$k_z \rho_i \simeq 1. \quad (19.6)$$

Из (19.5) видно, что предположение $k > \omega_{pe}/c$ оправдывается вплоть до

$$\beta \simeq 1. \quad (19.7)$$

Вплоть до таких же β качественно справедливы и соотношения (19.4) — (19.6).

§ 19.2. Высокочастотная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков

При $k_{\perp} \ll \omega_{pe}/c$ из (19.3) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 - \frac{i\omega}{k_{\perp} v_0 \beta_i} = 0, \quad (19.8)$$

$\beta_i \equiv (v_0/c_A)^2$. Это уравнение описывает существенно непотенциальные возмущения. Их максимальный инкремент

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq k_{\perp} v_0 \beta_i \simeq \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^2 \omega_{Be} \cos \theta. \quad (19.9)$$

Этим возмущениям соответствуют довольно малые продольные волновые числа:

$$k_z \rho_i \simeq \beta_i^2. \quad (19.10)$$

Решение (19.9) удовлетворяет условию $\gamma > \omega_{Bi}$ при $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, что совместимо с принятым выше предположением $k \ll \omega_{pe}/c$, если

$$\beta \gg m_e/m_i. \quad (19.11)$$

§ 19.3. Циклотронная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков

Пусть, как и в § 19.2, $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, а k_z достаточно мало:

$$k_z \rho_i \simeq \frac{\beta_i}{k_{\perp} \rho_i} < \beta_i^2. \quad (19.12)$$

При таких k_z частота ветви свистящих атмосфериков порядка ионно-циклотронной частоты ω_{Bi} . Чтобы распространить результаты § 19.2 на эту область частот, необходимо вместо приближенного выражения (19.2) для $\epsilon_{11}^{(i)}$ использовать более точное

$$\epsilon_{11}^{(i)} = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^{\infty} d\epsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_{\perp}}{\partial \epsilon_{\perp}}. \quad (19.13)$$

Здесь $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Bi}$; $\epsilon_{\perp} = v_{\perp}^2 / 2$; $f_{\perp} = f_{\perp}(\epsilon_{\perp})$; $f_{\perp}(0) = 0$; $\int f_{\perp} d\epsilon_{\perp} = 1$. [В формуле (19.2) предполагалось $f_{\perp}(\epsilon_{\perp}) = \delta(\epsilon_{\perp} - v_0^2/2)$.]

При $\epsilon_{11}^{(i)}$ вида (19.13) вместо (19.3) получается дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 + c_A^2 \int_0^{\infty} d\epsilon_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_{\perp}}{\partial \epsilon_{\perp}} = 0. \quad (19.14)$$

Исследуем это уравнение, полагая параметр $\xi \gg n$, где n — несколько первых натуральных чисел. При таких ξ $J_n^2(\xi) \approx (\pi\xi)^{-1}$, так что из (19.14) следует:

$$1 - \frac{\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^4 + \frac{1}{\pi k \rho_i \beta_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (19.15)$$

Поскольку выше предполагалось $k_{\perp} \rho_i > 1/\beta_i$, то коэффициент при сумме мал. Используя эту малость, находим приближенное решение для частоты нарастающих возмущений:

$$\text{Re } \omega \approx \omega_{Be} \cos \theta \left(\frac{ck}{\omega_{pe}} \right)^2 \approx n\omega_{Bi}; \quad (19.16)$$

$$\gamma \approx \left(\frac{1}{2\pi k \rho_i \beta_i} \right)^{1/2} n\omega_{Bi}. \quad (19.17)$$

§ 19.4. Неустойчивость двугорбого распределения при малой доле холодных ионов

1. Дисперсионные уравнения. Полагаем, что помимо горячих ионов с $\partial f_{\perp} / \partial v_{\perp} > 0$ в плазме имеется некоторое число холодных с плотностью $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$. Ионная функция распределения имеет два максимума, в связи с чем такое распределение называется двугорбым (double humped). Рассмотрим возмущения плазмы с двугорбым распределением ионов, предполагая $k_z = 0$. Ионная компонента $\epsilon_{11}^{(i)}$ тензора диэлектрической проницаемости

теперь определяется выражением

$$\epsilon_{11}^{(i)} = -\frac{\alpha \omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^\infty d\epsilon_\perp \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \cdot \frac{\partial f_\perp}{\partial \epsilon_\perp}. \quad (19.18)$$

При $\rho_i^{-1} \ll k \ll \omega_{pe}/c$ с помощью (15.68), (16.3), (19.18) получаем дисперсионное уравнение непрерывного спектра

$$1 - \frac{\alpha c_A^2 k^2}{\omega^2} - \frac{i\omega}{kv_0 \beta_i} = 0 \quad (19.19)$$

и аналогичное уравнение для гармоник

$$1 - \frac{\alpha c_A^2 k^2}{\omega^2} + \frac{1}{\pi k \rho_i \beta_i} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (19.20)$$

Уравнения (19.19), (19.20) сходны соответственно с (19.3) и (19.15). Отличие состоит в том, что роль электронной компоненты теперь играют холодные ионы.

2. Колебания непрерывного спектра. Решения уравнения (19.19) имеют различный вид в зависимости от отношения α/β_i^2 . При $\alpha \ll \beta_i^2$

$$\text{Re } \omega = \sqrt{\alpha} c_A k; \quad (19.21)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\alpha} c_A k}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta_i^2} \right)^{1/2}. \quad (19.22)$$

При $k < \omega_{pe}/c$ условие $\gamma > \omega_{Bi}$ удовлетворяется, если

$$\alpha > 2 (m_e/m_i)^{1/2} \beta_i^{3/2}, \quad (19.23)$$

а параметр β_i должен быть большим, чем $(m_e/m_i)^{1/2}$.

В другом предельном случае, $\alpha \gg \beta_i^2$,

$$\text{Re } \omega \simeq \gamma \simeq \alpha^{1/3} kv_0. \quad (19.24)$$

Это решение удовлетворяет условию $|\omega| > \omega_{Bi}$ при $k \rho_i > \alpha^{-1/3}$, а параметр α должен быть при этом большим $(m_e/m_i)^{3/4}$.

3. Колебания дискретного спектра. При $m_e/m_i < \alpha < \beta_i^2$ уравнение (19.20) описывает раскачку ионно-цикло-

тройных гармоник

$$\text{Re } \omega \approx \sqrt{\alpha} c_A k \approx n\omega_{Bi} \quad (19.25)$$

с инкрементом

$$\gamma \simeq \text{Re } \omega / (\pi k \rho_i \beta_i)^{1/2}. \quad (19.26)$$

Эта неустойчивость развивается вместо неустойчивости непрерывного спектра, если не удовлетворяется условие (19.23).

§ 19.5. Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы с большим β

Предположим теперь $\beta_i \gg 1$ и покажем, что при этом условии в плазме может развиваться конусная неустойчивость, описываемая уравнением высокочастотного приближения (19.2). Полагая ионный вклад в (19.2) меньше вклада остальных членов, решаем это уравнение методом последовательных приближений. В нулевом приближении из (19.2) получаем выражение для частоты свистящих атмосфериков [ср. с (16.7), (16.10)]:

$$\omega^{(0)} = \frac{\omega_{Be} \cos \theta}{1 + (\omega_{pe}/ck)^2}. \quad (19.27)$$

При $\omega^{(0)} < kv_0$ и не слишком малой разности $1 - \omega^{(0)}/k_\perp v_0$ из (19.2) находим инкремент этих колебаний:

$$\gamma \sim \frac{\omega_{гибр}^2}{k_\perp v_0 [1 - (\omega_{pe}/ck)^2]}. \quad (19.28)$$

Он максимален при $k_\perp \sim \omega_{pe}/c$ и равен при этом

$$\gamma_{\text{макс}} \sim \omega_{гибр} / \sqrt{\beta_i}. \quad (19.29)$$

Таким образом, конусная неустойчивость остается и при $\beta \gg 1$, хотя ее инкремент становится меньше, чем при $\beta \ll 1$.

Библиографический обзор к гл. 19

1. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70. Результаты, полученные в § 8 работы [1], легли в основу гл. 19.

2. Kurchashov Yu. P., Chudin N. V. II. F. instability of a finite pressure plasma in the presence of the loss cone.—«Plasma Phys.», 1972, v. 14, p. 133.
Рассматривается высокочастотная конусная неустойчивость, § 19.5.
3. Himmel L. C. Finite-beta instabilities inherent to a mirror confined plasma.—«Phys. Fluids», 1971, v. 14 p. 1419.
4. Cordey J. G., Farr W. M. Ion cyclotron instabilities in high- β plasmas.—«Plasma Phys.», 1972, v. 14, p. 1109.
В [3, 4] показано, что при конечных β и $k_z = 0$ в плазме с $\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$ появляется новая разновидность ионно-циклотронных неустойчивостей.
5. Callen J. D., Guest G. E. Electromagnetic effects on electrostatic modes in a magnetized plasma.—«Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 87.
Производится подробный анализ полного дисперсионного уравнения для плазмы конечного давления с $\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$.
6. Callen J. D., Guest G. E. Electromagnetic modifications of the electrostatic dispersion relation.—«Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 1588.
Обсуждается влияние непотенциальности возмущения на высокочастотную и циклотронную конусную неустойчивости.
7. Amano T. e.a. Cyclotron instabilities in a finite pressure plasma.—«J. Phys. Soc. Japan», 1972, v. 32, p. 1112; 1973, v. 34, p. 1593.
Исследуется влияние непотенциальности возмущений, обусловленное конечностью β , на циклотронную конусную неустойчивость.

ГЛАВА 20

РАСКАЧКА КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ
БЫСТРЫМИ ИОНАМИ§ 20.1. Быстрые ионы
с анизотропным распределением
по скоростям

1. Дисперсионное уравнение. Раскачка электромагнитных колебаний вследствие анизотропии проявляется сильнее всего при $k_{\perp} = 0$. Дисперсионное уравнение для системы холодная плазма — быстрые ионы при $k_{\perp} = 0$ имеет вид [см. уравнения (II.15.26), (II.15.28)]

$$\epsilon_{\pm}^{(0)} + \epsilon_{\pm}^{(1)} - N^2 = 0. \quad (20.1)$$

где

$$\epsilon_{\pm}^{(0)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Be})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Bi})}; \quad (20.2)$$

$$\epsilon_{\pm}^{(1)} = \frac{4\pi e^2 n_1}{m_i \omega} \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega \mp \omega_{Bi} - k_z v_z} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \right] \right\rangle, \quad (20.3)$$

$\langle F \rangle = 1$. Ограничимся рассмотрением колебаний с частотами $\omega \ll \omega_{Bi}$. При таких частотах

$$\epsilon_{\pm}^{(0)} = c^2 / c_A^2, \quad (20.4)$$

так что в нулевом приближении по малому параметру n_1/n_0 из (20.1) получаем

$$\omega^2 = \omega_{\pm}^2 = k_z^2 c_A^2. \quad (20.5)$$

Этот результат относится к решениям с обоими знаками в индексе $\epsilon_{\pm}^{(0)}$, что соответствует двум типам волн — альфвеновским и магнитно-звуковым. Дополнительный анализ дисперсионного уравнения при конечных ω/ω_{Bi} показывает, что альфвеновским волнам соответствует знак «+», а магнитно-звуковым — знак «-».

Учитывая вклад $\epsilon_{\pm}^{(1)}$, находим инкремент колебаний:

$$\gamma_{\pm} = \frac{2\pi^2 e^2 n_1}{m_i} \cdot \frac{c_A^2}{c^2} \cdot \frac{k_z}{\omega_{\pm}} \times \\ \times \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} \right) \delta(k_z v_z \pm \omega_{Bi}) \right\rangle. \quad (20.6)$$

2. Быстрые ионы с двумаксвелловским распределением по скоростям. При F вида (15.30) из (20.6) следует:

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{\pi} (n_1/n_0) \omega_{Bi}^2}{2k_z^2 c_A v_{T\parallel i}} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega_{Bi}}{k_z v_{T\parallel i}} \right)^2 \right]. \quad (20.7)$$

Ионы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ раскачивают альфвеновские волны, а с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ — магнитно-звуковые.

Поскольку частота (20.5) удовлетворяет условию $\omega < \omega_{Bi}$ только при $k_z < \omega_{Bi}/c$, то инкремент (20.7) не экспоненциально мал, если

$$v_{T\parallel} < c_A. \quad (20.8)$$

Это означает, что раскачка электромагнитных волн группой быстрых анизотропных ионов эффективна, если энергия этих ионов сравнима с энергией магнитного поля, переходящей на одну частицу холодной плазмы [ср. с ана-

логичным критерием (16.18) для электронной неустойчивости].

3. Раскачка быстрыми α -частицами электромагнитных колебаний плазмы, удерживаемой в адиабатической ловушке. В термоядерной плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке, должно содержаться некоторое количество быстрых α -частиц — с энергией около 3,5 Мэв. Вследствие ухода части α -частиц в конус потерь их распределение по скоростям должно быть анизотропным, а это может служить причиной раскачки электромагнитных колебаний. Исследуем соответствующий тип неустойчивости, полагая, что функция распределения α -частиц имеет вид:

$$F = \begin{cases} \left(\frac{R}{R-1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{T_1}\right)^{3/2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{m_1 v^2}{2T_1}\right), & |v_z| < v_{\perp} (R-1)^{1/2}; \\ 0, & |v_z| > v_{\perp} (R-1)^{1/2}, \end{cases} \quad (20.9)$$

где R — пробочное отношение, m_1 — масса α -частиц.

Функция вида (20.9) является частным случаем функций типа

$$F = f_0(v) \Phi(\vartheta), \quad (20.10)$$

где $\vartheta = \arctg(v_{\perp}/v_z)$; $v = (v_{\perp}^2 + v_z^2)^{1/2}$. Для таких функций общее выражение (20.6) можно записать в виде

$$\gamma_{\pm} = -\frac{\pi^2 e_1^2 n_1 c_A^3 k_z}{m_1 c^2 \omega_{\pm}} \int_0^{\infty} dv \times \\ \times \int_0^{\pi} d\vartheta v^3 f_0(v) \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \delta(k_z v \cos \vartheta \pm \omega_{B1}). \quad (20.11)$$

Здесь e_1 — заряд α -частиц; $\omega_{B1} = e_1 B_0 / m_1 c$. При F вида (20.9) $\partial \Phi / \partial \vartheta = -2[\delta(\vartheta - \vartheta_0) + \delta(\vartheta - \pi + \vartheta_0)]$. Используя это условие, проводим в (20.11) интегрирование по ϑ и v и получаем окончательное выражение для инкремента колебаний:

$$\gamma = 2 \frac{n_1}{n_0} \frac{\omega_{B1}^2}{|k_z| c_A} \sqrt{\pi R} x^3 \exp(-x^2), \quad (20.12)$$

где $x = \omega_{B1} / k_z v_{T1} \cos \vartheta_0$; $v_{T1} = (2T_1 / m_1)^{1/2}$; $\cos \vartheta_0 = [(R-1)/R]^{1/2}$. Инкремент (20.12) неэкспоненциально мал при условии типа (20.8). При $v_{T1} \simeq c_A$

$$\gamma \simeq \frac{n_1}{n_0} \omega_{B1}. \quad (20.13)$$

§ 20.2. Ионно-циклотронная неустойчивость магнитно-звуковых колебаний при $k_z = 0$, вызываемая частицами с $df/dv_{\perp} > 0$

При наличии небольшого числа горячих немасвелловских ионов, $n_1 \equiv \alpha n_0 \ll n_0$, колебания плазмы с $k_z = 0$ и $\omega \gg \omega_{Bi}$ описываются дисперсионным уравнением [см. (19.13)]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\alpha \omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\perp} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{df_{\perp}}{d\varepsilon_{\perp}} = 0. \quad (20.14)$$

Здесь $f_{\perp}(\varepsilon_{\perp})$ — нормированная на единицу функция распределения быстрых ионов.

При $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ колебания существенно непотенциальны, если $k < \omega_{pe}/c$. Если, кроме того, $\xi \gg 1$, что совместимо с условием $k < \omega_{pe}/c$ при

$$v_{\perp} > (m_e/m_i)^{1/2} c_A, \quad (20.15)$$

то дисперсионное уравнение (20.14) сводится к виду [ср. с (19.20)]

$$1 - \frac{k^2 c_A^2}{\omega^2} + \frac{\alpha c_A^2}{\pi k \rho_1 v_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0, \quad (20.16)$$

где $v_1 = \left[\int (f_1/v^3) d\varepsilon_{\perp} \right]^{-1/3}$; $\rho_1 = v_1/\omega_{B1}$.

В пренебрежении быстрыми ионами частота колебаний вещественна:

$$\omega^2 = k^2 c_A^2. \quad (20.17)$$

Это высокочастотные магнитно-звуковые колебания. Их волновое число k , хотя и меньше ω_{pe}/c , но тем не менее достаточно велико, $k > \omega_{pi}/c$.

Быстрые частицы приводят к раскачке колебаний при

$$\omega \approx kc_A \approx n\omega_{Vi}. \quad (20.18)$$

Инкремент такой неустойчивости выражается формулой

$$\gamma = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi k r_1}\right)^{1/2} \frac{c_A}{v_1} n\omega_{Vi}. \quad (20.19)$$

Подобного рода раскачка ионно-циклотронных гармоник может происходить в плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке, если такая плазма содержит некоторое количество быстрых α -частиц, образующихся в результате термоядерных реакций.

Библиографический обзор к гл. 20

1. Тверской Б. А. Устойчивость радиационных поясов. — «Геоматнезизм и аэрономия», 1967, т. 7, с. 226.
2. Cornwall J. M. Cyclotron instabilities and electromagnetic emission in the ultralow frequency and very low frequency ranges. — «J. Geophys. Res.», 1965, v. 70, p. 61.
3. Kennel C. F., Petschek H. E. Limit of stably trapped particle fluxes. — «J. Geophys. Res.», 1966, v. 71, p. 1.
4. Kennel C. F. Low-frequency whistler mode. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2190.
5. Criswell D. R. Pc 1 micropulsation activity and magnetospheric amplification of 0.2 to 5.0 Hz hydromagnetic waves. — «J. Geophys. Res.», 1969, v. 74, p. 205.
В работах [1—5] обсуждаются неустойчивости, обусловленные анизотропией быстрых ионов (§ 20.1).
6. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
7. Степанов К. П., Красовицкий В. Б. О прохождении ионных потоков через плазму. — «Изв. вузов. Радиофизика», 1964, т. 7, с. 83.
В работах [6, 7] исследуются электромагнитные неустойчивости с $\omega \gg \omega_{pi}$, вызываемые быстрыми ионами с $\partial f_0/\partial v_{\perp} > 0$ (§ 20.2).
8. Кораблев Л. В., Рудаков Л. И. О неустойчивости плазмы с изотропной функцией распределения. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 54, с. 818.
9. Беликов В. С. и др. Устойчивость магнитно-активной плазмы с мопознергетичной компонентой. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 2210.
В работах [8, 9] исследовались неустойчивости, вызываемые α -частицами.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная неустойчивость 74
Альфвеновские волны 250, 252
Анизотропия ионная 180, 243
— электронная 127, 225
Анизотропное распределение 49
Аномальная диссипация 34
- Бесстолкновительная диссипация 29
Больцмана уравнение 7
Большого давления плазма 207
Бриггса метод 76
Бунчировка пространственного заряда 17
Быстрые частицы 225, 260
— ионы 225
— электроны 260
- Ветви колебаний 97
Взаимодействие пучка с плазмой 57, 112, 225
— черенковское 113
— циклотронное 115
Возмущение 10
— пространственно-локализованное 68
Волна косая 218
— с отрицательной энергией 32
Волновой пакет 77
Волны альфвеновские 250, 252
— магнитно-звуковые 252, 261
— электромагнитные 13
- Гибридная частота 99
Гидродинамика одножидкостная 249
Горячая плазма 58
Горячий пучок 57
Граница неустойчивости 20
— анизотропной 137
Групповая скорость 18
- «Двумаквелловское» распределение 49
Дебаевский радиус 36
Декремент затухания колебаний 40
 δ -функциональное распределение 50
- Диаграмма устойчивости плазмы 182
Дисперсионное уравнение 15
Диэлектрическая проницаемость 16, 87
— — максвелловской плазмы 91
— — скалярная 16
Доплера эффект 115
Достаточное условие устойчивости 41
- Затухание Ландау 38
Зеркальная неустойчивость 250
Зоны неустойчивости 142
- Инкремент нарастания колебаний 17
Интегрирование по траекториям 88
Ионно-звуковые колебания 38, 102
Ионно-циклотронная неустойчивость 158
Ионно-циклотронные колебания 105
Ионные ленгмюровские колебания 38, 102
Ионный пучок 63
- Кинетические неустойчивости 54
Колебания 10
— ионно-звуковые 38, 102
— ионно-циклотронные 105
— ионные ленгмюровские 38, 102
— споровые 18
— собственные 11
— электронно-звуковые 105
— электронные 98
- Конечный ларморовский радиус 101
Конусная неустойчивость 254
Критическая плотность 136
- Ландау затухание 38
— правило 28
Лапласа метод 14, 26
— преобразование 14, 26
Ларморовский радиус 90, 101
Ленгмюровские колебания 12
- Магнитно-звуковые волны 252, 261
Мазерная неустойчивость 239

- Максвелла распределение 36
 Метод Бриггса 76
 — интегрирование по траекториям 88
 — Лапласа 14, 26
 Механизм неустойчивости анизотропной 130
 — — пучковой 17
 — — электромагнитной 209
 Найквиста формула 44
 Необходимое условие неустойчивости 46
 Неустойчивость 16
 — α -частиц 262
 — альфвеновские волны 252
 — гидродинамического типа 131
 — зеркальная 250
 — ионно-звуковая 62
 — ионно-циклотронная 158
 — кинетическая 54
 — конусная 254
 — — плазмы большого давления 207
 — магнитно-звуковых волн 263
 — мазерная 239
 — нерезонансная 19
 — отрицательной массы 236
 — плазмы инертных газов 240
 — поперечного тока 161
 — продольного тока 154
 — пучковая 16
 — пучково-анизотропная 149
 — резонансная 19
 — релятивистских электронов 238
 — свистящих атмосфериков 234
 — сталкивающихся плазм 251
 — типа Бунемана 22
 — убегающих электронов 124, 158, 234
 — шланговая 249
 — электромагнитная 204
 Однокиклотронная гидродинамика 249
 Отрицательная проводимость 32
 Плазма большого давления 208
 — в магнитном поле 97
 — горячая 58
 — конечного давления 254
 — плотная 188
 — разреженная 186
 — релятивистская 239
 — холодная 97
 Показатель преломления 23
 Поперечный ток 161
 Потенциальные колебания 12
 Продольный ток 154
 Проницаемость диэлектрическая 16, 87
 Пространственно-локализованное возмущение 68
 Пучковая неустойчивость 16
 Пучково-анизотропная неустойчивость 149
 Пучки равной плотности 16, 204
 Пучок 16
 — горячий 57
 — ионный 63
 — холодный 112
 — электронный 112, 225
 Распределение по скоростям 7
 — — — анизотропное 49
 — — — «двумаксвелловское» 49
 — — — δ -функциональное 50
 Резонансная неустойчивость 19
 Резонанс циклотронный 116
 — черенковский 115
 Релятивистская плазма 239
 Скалярная диэлектрическая проницаемость 16
 Скорость групповая 18
 — тепловая 36
 — фазовая 13
 Сносные колебания 18
 Собственные колебания 11
 Тензор диэлектрической проницаемости 22
 — — — релятивистской плазмы 220
 — — — холодной плазмы 22, 226
 — — — проводимости 22
 Тепловая скорость 36
 Ток поперечный 161
 — продольный 154
 Убегающие электроны 124, 158, 234
 Усиление волн 80
 Фазовая скорость 13
 Функции распределения 7
 Циклотронная частота 87
 Циклотронные гармоники 101
 Циклотронный резонанс 116
 Частота колебаний 11
 — ленгмюровская 12
 Черенковский резонанс 115
 Шланговая неустойчивость 249
 Электромагнитная неустойчивость 204
 Электромагнитные волны 13
 Электронно-звуковые колебания 105
 Электронный пучок 112, 225
 Энергия колебаний 32

Предисловие	3
Из предисловия к первому изданию	6
Исходные уравнения	7
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.	
ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ	
БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ	
Глава 1. Неустойчивости холодной однородной плазмы	9
§ 1.1. Гидродинамическое приближение	9
§ 1.2. Постановка задачи о собственных колебаниях	10
§ 1.3. Собственные колебания покоящейся однородной плазмы	11
§ 1.4. Дисперсионное уравнение для плазмы, состоящей из совокупности направленных потоков	15
§ 1.5. Пучковая неустойчивость	16
§ 1.6. Неустойчивость относительного движения электронов и ионов	21
Приложение. Тензор диэлектрической проницаемости	22
Библиографический обзор к гл. 1.	24
Глава 2. Кинетическое описание колебаний плазмы и общие критерии устойчивости и неустойчивости	26
§ 2.1. Задача о собственных колебаниях в кинетике	26
§ 2.2. Безстолкповительная диссипация энергии колебаний	29
§ 2.3. Энергетическая классификация слаборастающих возмущений	32
§ 2.4. Затухание ленгмюровских колебаний в максвелловской плазме	36
§ 2.5. Ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания	38
§ 2.6. Достаточное условие устойчивости однородной бесстолкповительной плазмы	41
§ 2.7. Критерии устойчивости и неустойчивости плазмы относительно потенциальных возмущений при $B_0 = 0$	43

§ 2.8. Некоторые примеры устойчивых и неустойчивых распределений (приближение потенциальных возмущений и $\mathbf{V}_0 = 0$)	47
Библиографический обзор к гл. 2.	52
Глава 3. Кинетические неустойчивости	54
§ 3.1. Влияние теплового движения частиц на гидродинамическую пучковую неустойчивость	54
§ 3.2. Неустойчивость пучка с большим тепловым разбросом в плотной холодной плазме	56
§ 3.3. Неустойчивость холодного пучка в плотной горячей плазме	58
§ 3.4. Неустойчивость плазмы с относительным движением электронов и ионов	61
§ 3.5. Раскачка ионным пучком ионно-электронных колебаний плазмы	63
Библиографический обзор к гл. 3.	66
Глава 4. Пространственно-локализованные возмущения в неустойчивой плазме и усиление волн	68
§ 4.1. Предварительные замечания	68
§ 4.2. Возмущение с широким набором волновых чисел в неустойчивой плазме	71
§ 4.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости	74
§ 4.4. Волновой пакет	77
§ 4.5. Возбуждение колебаний неустойчивой плазмы сторонними источниками и усиление волн	80
Библиографический обзор к гл. 4	85

**ЧАСТЬ ВТОРАЯ.
ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В
МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Глава 5. Диэлектрическая проницаемость плазмы в магнитном поле	87
§ 5.1. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы	87
§ 5.2. Метод интегрирования по траекториям	88
§ 5.3. Диэлектрическая проницаемость горячей плазмы	91
§ 5.4. Диэлектрическая проницаемость в приближении низких частот	92
§ 5.5. Диэлектрическая проницаемость в приближении высоких частот	93
Библиографический обзор к гл. 5	95
Глава 6. Ветви потенциальных колебаний плазмы в магнитном поле	97
§ 6.1. Колебания холодной плазмы	97
§ 6.2. Колебания с частотами вблизи электронных циклотронных гармоник	101
§ 6.3. Ионно-звуковые и ионные ленгмюровские колебания плазмы в магнитном поле	102
§ 6.4. Ионно-циклотронные и электронно-звуковые колебания	105
Библиографический обзор к гл. 6	110

Глава 7. Плазма с продольными электронными потоками	112
§ 7.1. Холодная плазма и пучок при $\omega_{pe} > \omega_{ce}$	112
§ 7.2. Холодная плазма и пучок в сильном магнитном поле	116
§ 7.3. Неустойчивость «горячего» пучка в плотной холодной плазме	118
§ 7.4. Неустойчивость медленного пучка в горячей плазме	122
§ 7.5. Неустойчивость одномерного распределения с одним максимумом	124
Библиографический обзор к гл. 7.	126
Глава 8. Плазма с немаксвелловскими электронами	127
§ 8.1. Об аналогии между эффектами пучка и анизотропии	127
§ 8.2. Неустойчивость гидродинамического типа анизотропной плазмы	131
§ 8.3. Кинетическая неустойчивость анизотропной плазмы	137
§ 8.4. Неустойчивость плазмы с немаксвелловским распределением частиц по поперечным скоростям	141
Библиографический обзор к гл. 8	144
Глава 9. Плазма с группой немаксвелловских электронов	145
§ 9.1. Возбуждение колебаний холодной плазмы группой быстрых частиц с анизотропным распределением по скоростям	145
§ 9.2. Пучково-анизотропная неустойчивость	149
§ 9.3. Возбуждение колебаний плазмы группой быстрых частиц с неравновесным распределением по поперечным скоростям	151
Библиографический обзор к гл. 9	153
Глава 10. Плазма с продольным током	154
§ 10.1. Плазма с большой токовой скоростью в слабом магнитном поле	154
§ 10.2. Плазма с большой токовой скоростью в сильном магнитном поле	155
§ 10.3. Раскачка током высокочастотных ионно-звуковых колебаний	157
§ 10.4. Раскачка высокочастотных ионно-звуковых колебаний убегающими электронами	158
§ 10.5. Ионно-циклотронная неустойчивость	158
§ 10.6. О раскачке низкочастотных ионно-звуковых колебаний	159
Библиографический обзор к гл. 10	160
Глава 11. Плазма с поперечным током	161
§ 11.1. Введение	161
§ 11.2. Неустойчивость холодной плазмы	161
§ 11.3. Раскачка электронно-звуковых колебаний в плазме с горячими ионами	163
§ 11.4. Раскачка ионно-звуковых колебаний в плазме с горячими электронами	164

§ 11.5. Раскачка колебаний плазмы поперечным ионным потоком	166
Библиографический обзор к гл. 11	168
Глава 12. Высокочастотная неустойчивость плазмы с немаксвелловским распределением ионов по поперечным скоростям	169
§ 12.1. Неустойчивость плазмы с δ -функциональным распределением ионов по поперечным скоростям	169
§ 12.2. Неустойчивость плазмы с размытым распределением ионов по поперечным скоростям	171
§ 12.3. Неустойчивость стационарного распределения ионов в адиабатической ловушке	172
§ 12.4. Стабилизирующая роль электронной температуры	175
§ 12.5. Плазма с двумя группами ионов	177
Библиографический обзор к гл. 12	179
Глава 13. Плазма с анизотропными ионами	180
§ 13.1. Разреженная сильноанизотропная плазма с холодными электронами	180
§ 13.2. Разреженная плазма с холодными электронами и конечным $T_{\parallel i}/T_{\perp i}$	184
§ 13.3. Разреженная сильноанизотропная плазма с конечной температурой электронов	186
§ 13.4. Плотная плазма с конечной температурой электронов	188
Библиографический обзор к гл. 13	191
Глава 14. Раскачка ионно-циклотронных колебаний в плазме с поперечно-немаксвелловскими ионами	192
§ 14.1. Неустойчивости плазмы с холодными электронами	192
§ 14.2. Неустойчивости плотной плазмы с горячими электронами	196
§ 14.3. Раскачка циклотронных колебаний резонансными электронами в разреженной плазме	198
§ 14.4. Раскачка колебаний резонансными электронами в плазме умеренной плотности	199
§ 14.5. Суммирование результатов, полученных в § 14.1—14.4	200
§ 14.6. Неустойчивость плазмы, состоящей из двух групп ионов	201
Библиографический обзор к гл. 14	202

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Глава 15. Электромагнитные неустойчивости плазмы с анизотропными электронами	203
§ 15.1. Предварительные замечания	203
§ 15.2. Электромагнитная неустойчивость двух встречных электронных потоков	204
§ 15.3. Два встречных потока в продольном магнитном поле	206
§ 15.4. Плазма большого давления с анизотропным распределением электронов	208

§ 15.5. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_z = 0$ в плазме с $T_{\parallel} > T_{\perp}$	214
§ 15.6. Влияние магнитного поля на возмущения с $k_{\perp} = 0$ в плазме с $T_{\perp} > T_{\parallel}$	216
§ 15.7. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp} > T_{\parallel}$ на косых волнах	218
Приложение. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле	220
Библиографический обзор к гл. 15	224
Глава 16. Раскачка электромагнитных колебаний плазмы группой быстрых электронов с анизотропным распределением по скоростям	225
§ 16.1. Постановка задачи	225
§ 16.2. Электромагнитные колебания в плазме с холодными электронами	226
§ 16.3. Раскачка электромагнитных колебаний с $k_{\perp} = 0$	228
§ 16.4. Раскачка низкочастотных колебаний с $k_{\perp} \neq 0$	229
§ 16.5. Электромагнитные неустойчивости в пучковых системах с анизотропным распределением частиц по скоростям	231
Библиографический обзор к гл. 16	235
Глава 17. Плазма с изотропным распределением электронов по скоростям при $df_0/dv > 0$	236
§ 17.1. Неустойчивость отрицательной массы	236
§ 17.2. Неустойчивость колебаний на верхней гибридной частоте в плазме, содержащей небольшую долю релятивистских электронов	238
§ 17.3. Мазерная раскачка электромагнитных волн в релятивистской плазме	239
§ 17.4. Раскачка электромагнитных колебаний в слабоионизованной плазме инертных газов	240
Библиографический обзор к гл. 17	241
Глава 18. Электромагнитные неустойчивости плазмы с анизотропными ионами	243
§ 18.1. Предварительные замечания	243
§ 18.2. Неустойчивость в приближении нулевого магнитного поля ($\beta \rightarrow \infty$)	244
§ 18.3. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\parallel i} > T_{\perp i}$ при $k_z = 0$	245
§ 18.4. Влияние магнитного поля на неустойчивость плазмы большого давления с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ при $k_{\perp} = 0$	246
§ 18.5. Неустойчивости плазмы с $1 < \beta < m_i/m_e$	247
§ 18.6. Кинетические неустойчивости плазмы с $\beta \approx 1$ при $k_{\perp} = 0$	248
§ 18.7. Гидродинамическая неустойчивость плазмы с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ (плазменная неустойчивость)	249
§ 18.8. Низкочастотная неустойчивость плазмы с $T_{\perp i} > T_{\parallel i}$ на косых волнах (зеркальная неустойчивость)	250
§ 18.9. Сталкивающиеся плазмы	251
Библиографический обзор к гл. 18	253

Глава 19. Конусные неустойчивости в плазме с конечным β	254
§ 19.1. Пределы применимости потенциального приближения	254
§ 19.2. Высокочастотная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков	256
§ 19.3. Циклотронная конусная неустойчивость на ветви свистящих атмосфериков	256
§ 19.4. Неустойчивость двугорбого распределения при малой доле холодных ионов	257
§ 19.5. Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы с большим β	259
Библиографический обзор к гл. 19	259
Глава 20. Раскачка колебаний плазмы быстрыми ионами	260
§ 20.1. Быстрые ионы с анизотропным распределением по скоростям	260
§ 20.2. Ионно-циклотронная неустойчивость магнитно-звуковых колебаний при $k_z = 0$, вызываемая частицами с $df/dv_{\perp} > 0$	263
Библиографический обзор к гл. 20	264
Алфавитно-предметный указатель	265

Анатолий Борисович Михайловский

ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ
Т о м 1. Неустойчивости однородной плазмы

Редактор *В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. Т. Курьянов*
Художник *В. Н. Тихунов*
Технический редактор *И. Н. Подшебякин*
Корректор *Л. А. Куралева*

Сдано в набор 29/IV 1975 г. Подписано к печати 21/X 1975 г. Т-15798.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 14,28.
Уч.-изд. л. 14,09. Тираж 2800 экз. Цена 1 р. 78 к.
Зак. изд. 73042. Зак. тип. 0845
Атомиздат 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5
Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.